Vorlesung: Mathematische Logik

Prof. Dr. Martin Weese / Dr. Thoralf Räsch
Wintersemester 2005/06

Übungsaufgaben — Serie 11

Hausaufgabe 1. Sei $\mathfrak{M}$ eine fixierte $\mathcal{L}$-Struktur und sei $\mathfrak{M}_i := \mathfrak{M}$ für $i \in \mathbb{N}$. Bezeichne D einen freien Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ und setze $\mathfrak{M}^* = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{M}_i/D$. Sei weiterhin $\pi : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}^*$ die Abbildung, gegeben durch die konstante Folge

$$m \mapsto (m, m, \dots)/\sim .$$

(a) Zeigen Sie, dass π eine elementare Einbettung ist.
(b) Zeigen Sie, dass π genau dann surjektiv ist, wenn $\mathfrak{M}$ endlich ist.

Hausaufgabe 2. Wir betrachten den Graph (ω, E) auf den natürlichen Zahlen, dessen Kanten $(n, m) \in E$ für $n, m \in \omega$ gerade durch die Eigenschaft $\varphi(n, m)$ oder $\varphi(m, n)$ gegeben sind, wobei $\varphi(x, y)$ die folgende Formel bezeichne:

Wenn $y = \sum_{i=0}^{\infty}(\alpha(i) \cdot 2^i)$ für $\alpha(i) \in \{0, 1\}$, dann gilt $\alpha(x) = 1$

Prüfen Sie, ob dies ein Zufallsgraph ist.

Hausaufgabe 3. Wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei $\mathcal{L}$-Strukturen sind, dann nennen wir $\mathcal{F}$ ein *back-and-forth*-System für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, wenn $\mathcal{F}$ eine Familie von partiellen Einbettungen von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$ mit endlichen Definitionsbereichen und folgenden Eigenschaften ist:

(i) Für alle $f \in \mathcal{F}$ and $a \in M$ existiert ein $g \in \mathcal{F}$, so dass $g \supseteq f$ und a ist Element vom Definitionsbereich von g.
(ii) Für alle $f \in \mathcal{F}$ and $b \in N$ existiert ein $g \in \mathcal{F}$, so dass $g \supseteq f$ und b ist Element vom Wertebereich von g.

(a) Zeigen Sie, dass wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ abzählbar sind und es ein back-and-forth-System für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ gibt, dann gilt $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

(b) Sei $\mathcal{F}$ ein back-and-forth-System für $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$. Sei weiterhin $f \in \mathcal{F}$ und läge $\bar{a}$ im Definitionsbereich von f. Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{M}, \bar{a}) \sim_\alpha (\mathfrak{N}, f(\bar{a}))$ für $\alpha = \omega$ gilt.

(c) Was passiert in (b) für $\alpha = \omega_1$.

Auf diesem Übungsblatt gibt es insgesamt 4+5+6 Punkte, von denen nur 8 Punkte in die offizielle Punktezählung aufgenommen werden und jeder Punkt über den 8 Punkten als Zusatzpunkt gewertet wird.

Am Montag wird dann unter der bekannten Web-Adresse eine Liste mit Matrikelnummern zu finden sein, derer, die an der Klausur (eventuell mit Nebenbedingungen) teilnehmen dürfen. Zur Erinnerung: Die Klausur findet in der letzten Vorlesung am 8. Februar statt.

Abgabe: Übernächste Übungsstunde, 3. Februar 2006.