

Vorlesung: Mathematische Logik

Prof. Dr. Martin Weese / Dr. Thoralf Räsch
Wintersemester 2005/06

ÜBUNGSAUFGABEN — SERIE 10

Hausaufgabe 1. Beweisen Sie das Theorem von Łoś: Sei $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ eine \mathcal{L} -Sprache. Seien \mathfrak{M}_i für $i \in I$ gegebene \mathcal{L} -Modelle, D ein Ultrafilter auf I , der den Frechét-Filter erweitert, und $\mathfrak{M} := \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / D$ das Ultraprodukt. Dann gilt

$$\mathfrak{M} \models \varphi(g_1, \dots, g_n)$$

genau dann, wenn

$$\{ i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi(g_1(i), \dots, g_n(i)) \} \in D.$$

Hausaufgabe 2. Sei $\mathfrak{A} := \langle \mathbb{N}, 0, +, \cdot, < \rangle$ und $\mathfrak{M} := \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A} / D$, wobei D ein Ultrafilter auf den natürlichen Zahlen ist, der den Frechét-Filter erweitert. Zeigen Sie, dass es für eine beliebige Menge von Primzahlen X ein $a_X \in \mathfrak{M}$ derart gibt, dass p ein Teiler von a_X genau dann ist, wenn $p \in X$.

Hausaufgabe 3. Welche der folgenden 8 Aussagen sind wahr?

- (1) Unter diesen Aussagen ist mindestens eine wahr.
- (2) Unter diesen Aussagen sind mindestens zwei wahr.
- (3) Unter diesen Aussagen sind mindestens drei wahr.
- (4) Unter diesen Aussagen sind mindestens vier wahr.
- (5) Unter diesen Aussagen ist mindestens eine falsch.
- (6) Unter diesen Aussagen sind mindestens zwei falsch.
- (7) Unter diesen Aussagen sind mindestens drei falsch.
- (8) Unter diesen Aussagen sind mindestens vier falsch.

Abgabe: Nächste Übungsstunde, 20. Januar 2006.