Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 9 (Aufgaben 9.1 - 9.5)

Abgabe in den Übungen am 13.6.07

Aufgabe 9.1 (Fourier-Reihe und Parseval-Gleichung)

Finde die Fourier-Reihe der 2π–periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $[0, 2\pi)$ folgendermaßen definiert ist:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für} \quad 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \;. \end{cases}$$

Zeige mit Hilfe der Parseval–Gleichung Eulers Formel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \;.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 9.2 (Faltung)

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetige, 2π–periodische Funktionen. Wir definieren die **Faltung** von f mit g durch

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x - y)\, dy \;.$$

Zeige:

i) Kommutativität: $f * g = g * f$

ii) Bilinearität: $f * (g + h) = f * g + f * h \quad , \quad (f + g) * h = f * h + g * h \;.$

Sei $\widehat{f}(n)$ der n-te Fourier-Koeffizient von $f(x)$, d.h. $\widehat{f}(n) := \langle f, e^{inx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$. Die Funktion $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt die Fouriertransformierte von f. Zeige: $f * e^{inx} = \widehat{f}(n) e^{inx}$.

Schließe daraus, und aus i) und ii), dass die Faltung einer 2π–periodischen Funktion f mit einem trigonometrischen Polynom $P := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ wieder ein trigonometrisches Polynom ist, d.h.

$$f * P = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) c_n e^{inx} \;.$$

Zeige, dass

$$\widehat{f * P}(n) = \widehat{f}(n) c_n = \widehat{f}(n) \widehat{P}(n) \;.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 9.3 (Gammafunktion)

Die **Gammafunktion** $\Gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wird für reelle $\alpha > 0$ definiert durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \ .$$

Zeige:

i) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)\ ,\ \alpha > 0$

ii) $\Gamma(n+1) = n!\ ,\ n \in \mathbb{N}\,.$

Das heißt, die Gammafunktion dehnt die zunächst nur auf $\mathbb{N}$ definierte Fakultätsfunktion $n \mapsto n!$ auf die reelle Halbgerade aus.

(5 Punkte)

Aufgabe 9.4 (Offene Kugel)

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sei $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$ die offene Kugel um x_0 vom Radius r. Bestimme für jedes $x \in B_r(x_0)$ einen Radius $\rho > 0$, so dass $B_\rho(x) \subset B_r(x_0)$. Es folgt, dass $B_r(x_0)$ offen ist. (Tip: An einer Skizze für $n = 2$ ist leicht abzulesen, was der Abstand zwischen einem festen $x \in B_r(x_0)$ und dem Rand von $B_r(x_0)$ sein soll).

(5 Punkte)

Aufgabe 9.5 (Definitionen)

Keine Abgabe, aber zum Vortragen in den Übungen:

Schreibe in Schönschrift, aus dem Gedächtnis, die Definitionen von **offenen, abgeschlossenen, beschränkten** und **kompakten** Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ auf.
Gib zu jeder dieser Definitionen ein Beispiel an.