Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 8 (Aufgaben 8.1 - 8.2)

Abgabe in den Übungen am 6.6.07

Aufgabe 8.1 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Zeige, dass die folgenden Funktionenfolgen punktweise konvergieren und finde die Grenzwerte für $n \to \infty$:

a) $f_n(x) := \dfrac{x^2 + nx}{n} \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) $g_n(x) := x^n \ : \ [0,1] \to [0,1]$

c) $h_n(x) := (x^2)^{\frac{n}{2n-1}} \ : \ [-1,1] \to [0,1]$

Skizziere auch den Graphen von z.B. f_1, f_5, f_{20} , g_1, g_5, g_{20} und h_1, h_5, h_{20}, um die Konvergenzverhalten dieser Folgen nachzuvollziehen. Zeige, dass $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ nicht stetig ist, und $h = \lim_{n\to\infty} h_n$ nicht differenzierbar.

Argumentiere, dass die Konvergenz von f_n auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig ist. Ist dagegen die Konvergenz gleichmäßig auf $[-a, a] \subset \mathbb{R}$?

Finde den (punktweisen) Grenzwert der Funktionenfolge

$$k_n(x) := \frac{1}{n(1 + x^2)} \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

und zeige, dass diese Folge auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

(8 Punkte)

Aufgabe 8.2 (Fourier-Reihen)

Finde die Fourier-Reihen der stückweise glatten Funktionen $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

a) $$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ x(\pi - x) & \text{für } \ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

b) $$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \le x \le 0 \\ x & \text{für } \ 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \text{für } \ \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$$

c) $f(x) := \begin{cases} x & \text{für} \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für} \quad x = \pm\pi \end{cases}$

d) $f(x) := |x| \quad \text{für} \quad -\pi \leq x \leq \pi$

e) $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \text{ oder } x = \pm\pi \\ -1 & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$

f) $f(x) := x^2 \quad \text{für} \quad -\pi \leq x \leq \pi$.

In die Reihe für c) oder e) setze $x = \pi/2$ ein, um eine Reihe für π von Leibniz zu erhalten.
[Lösungen:

a) $$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^2} \cos 2nx + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^3} \sin(2n+1)x$$

b) $$f(x) = \frac{\pi}{8} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+2)^2} \cos(4n+2)x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x$$

c) $$f(x) = 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin nx \right)$$

d) $$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x \right)$$

e) $$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x \right)$$

f) $$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx \right)$$].

(12 Punkte)