Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 7 (Aufgaben 7.1 - 7.3)

Abgabe in den Übungen am 30.05.07

Aufgabe 7.1 (Bogenlängen)

a) **Parabelbogen**
Zeige, dass die Länge eines Parabelbogens $f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ der Spannweite $2a$ und der lichten Höhe h,

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + f'^2(x)}\; dx = \sqrt{a^2 + 4h^2} + \frac{a^2}{2h} \operatorname{arsinh} \frac{2h}{a}$$

ist. (Substitution: $\frac{2hx}{a^2} := \sinh t$).

b) **Kettenlinie**
Betrachte die Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}\,;\; y(x) = \cosh x\,,\; a \leq x \leq b$.
Die Kettenlinie $y(x)$ ist die Gleichgewichtsfigur einer Kette (als unendlich dünne, schwere, nicht dehnbare Linie idealisiert), die in den Punkten $(a, \cosh a)$ und $(b, \cosh b)$ aufgehängt ist, so dass die Schwerkraft in Richtung der negativen y-Achse wirkt. Berechne die Bogenlänge dieser Kettenlinie.

c) **Die Beschreibung des rollenden Rades**
Wir nennen die Kurve $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$Z(t) := r \cdot (\omega t + \sin(\omega t)\ ,\ 1 - \cos(\omega t))\ ,\ r = 1\ ,\ \omega = \text{const.}$$

Rollkurve oder Zykloide. Sie beschreibt die Bewegung eines Punktes auf dem Rand eines auf der x-Achse mit der Geschwindigkeit $r\omega$ rollenden Rades. Gib zu jedem Zeitpunkt t die Weglänge an, die dieser Punkt zurückgelegt hat, d.h. berechne die euklidische Bogenlänge der Rollkurve bis zum Zeitpunkt t. (Tip: verwende das bekannte Additionstheorem $1 + \cos\alpha = 2(\cos\frac{\alpha}{2})^2$ und den Satz des Pythagoras).

(7 Punkte)

Aufgabe 7.2 (Die Regel von L'Hospital)

a) Berechne für

$$h(t) := \frac{\ln\cosh(\alpha t)}{\ln\cosh(\beta t)}\ ,\ \alpha, \beta > 0\ ,$$

die Grenzwerte bei $t \to 0$ und bei $t \to \infty$.

b) Berechne:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}\ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 7.3 (Parametrisierte Kurve)

Sei B die Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt (0,0). Der Kreis mit Radius $\frac{1}{4}$ und Mittelpunkt $(\frac{3}{4}, 0)$ werde in B wie ein Rad auf dem Rand von B entlanggerollt, so dass $m(t) := \frac{3}{4}(\cos t, \sin t)$ der Mittelpunkt zum Zeitpunkt $t \in [0, 2\pi]$ ist. Die Bahn $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, die der am Anfang auf (1,0) liegende Punkt dabei durchläuft, ist eine spezielle *Hypozykloide*, nämlich die *Astroide*. Skizziere diese!

a) Betrachte den Vektor $v(t) := c(t) - m(t)$. Zeige, dass $v(t)$ mit dem Vektor $(\cos t, \sin t)$ den Winkel $4t$ bildet, und daher $v(t) = \frac{1}{4}\left(\cos(t-4t), \sin(t-4t)\right)$ ist.

b) Folgere durch Umformen, dass $c(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$.

c) Für welche $t \in [0, 2\pi]$ gilt $c'(t) = 0$?

d) Zeige, dass die Bogenlänge $L(c)$ der Astroide $c\colon [0, 2\pi] \ni t \mapsto \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right) \in \mathbb{R}^2$ 6 ist.

e) Berechne den von $c\big|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ mit der x- und der y-Achse eingeschlossenen Flächeninhalt.

   Betrachte dazu dieses Kurvenstück als Graph einer Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, wobei $f(\cos^3 t) = \sin^3 t$ gilt. Das Integral von $f(x)$ läßt sich mit Hilfe der Substitution $x = u(t) = \cos^3 t$ ausrechnen. Folgere, dass die Astroide insgesamt eine Fläche mit dem Flächeninhalt $\frac{3}{8}\pi$ umschließt. (Tip: Formel aus Aufgabe 2.4).

(10 Punkte)