Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 6 (Aufgaben 6.1 - 6.5)

Abgabe in den Übungen am 23.05.07

Aufgabe 6.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen (vgl. Aufg. 15.1 aus dem WS)

$$-f'' = \lambda f \ ,$$

mit $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$, kann auch als Eigenwertgleichung für den Endomorphismus $Lf := -f''$ verstanden werden. Prüfe nach, dass L symmetrisch ist bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \int_0^a f(x)g(x)\,dx$, wobei L Endomorphismus auf

$$V := \big\{ f\colon [0,a] \to \mathbb{R} \mid f'(0) = f'(a) = 0,\ f \text{ glatt auf } [0,a] \big\}$$

ist und $f, g \in V$. Für welche $A, B \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist $f(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$ eine Eigenfunktion von $L \in \mathrm{End}(V)$? Bestimme die zugehörigen Eigenwerte und normalisiere die Eigenfunktionen bezüglich $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.2 (Orthonormalsystem)

Sei V der hermitesche Vektorraum aller auf $[-\pi,\pi] \subset \mathbb{R}$ stetigen komplexen Funktionen, mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}g(x)\,dx$.

Zeige, dass die Funktionen $\varphi_n(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \in V\ ,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, orthonormal sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 6.3 (Der Satz von Cayley–Hamilton)

Verifiziere den Satz von Cayley–Hamilton für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Benütze diesen Satz um A^{-1} und A^5 zu berechnen.

(2 Punkte)

Aufgabe 6.4 (Pauli-Matrizen)

Sei

$$I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Mit Hilfe dieser Matrizen läßt sich jede komplexe 2×2 Matrix $M \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ in der Form $M = \frac{1}{2}\left(a_0 I_2 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\right)$ darstellen.

a) Zeige, dass die Matrizen σ_i , $i = 1, 2, 3$, hermitesch sind.

b) Zeige: $(\sigma_i)^2 = I_2$ für $i = 1, 2, 3$.

c) Weise nach, dass $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ gilt und berechne auch die Produkte $\sigma_1\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_2$, $\sigma_3\sigma_1$.

d) Nun zeige, dass

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} I_2 + i \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\sigma_k \ .$$

Die Matrizen $\{I_2, \sigma_i \ , \ i = 1, 2, 3\}$ stellen die Elemente von $\mathbb{H}$ (definiert in Aufgabe 10.8 (WS)) dar.

e) Bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.5 (Algebraisches Eigenwertproblem)

Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $x_i, \ i = 1, 2, 3, 4$. Sei $L \colon V \to V$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$x_1 \mapsto x_2 \quad , \quad x_2 \mapsto x_3 \quad , \quad x_3 \mapsto x_4 \quad , \quad x_4 \mapsto x_1 \ .$$

Bestimme alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von L.

(3 Punkte)