Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 4 (Aufgaben 4.1 - 4.5)

Abgabe in den Übungen am 9.05.07

Aufgabe 4.1 (Gleichungssysteme und inverse Matrix)

Betrachte die 3×3–Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3/5 & -20/65 & 48/65 \\ 4/5 & 15/65 & -36/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Zeige, dass die Spalten von A eine orthonormale Basis bilden (die Zeilen auch?).

b) $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimme $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$, die die Gleichungssysteme $Av_i = e_i$ und $Bw_i = e_i$ $(i = 1, 2, 3)$ lösen.

c) Berechne A^{-1} und B^{-1}.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2 (Orthogonale Abbildungen)

a) Sei $\langle \ , \ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Welche Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ erfüllen $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$?
(Bedingungen $(a_{11})^2 + (a_{21})^2 = \ldots$ usw. angeben für die Komponenten $(A)_{ij} = a_{ij}$.)

b) Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Bestimme eine Matrix $D_{z,\varphi} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, die bezüglich der Standard-Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$ eine Drehung vom Winkel φ um die z-Achse im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

c) Sei $\vartheta \in [0, \pi)$. Suche jetzt $D_{y,\vartheta} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^3$ eine Drehung vom Winkel ϑ um die y-Achse im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

d) Wende $D_{z,\varphi} \cdot D_{y,\vartheta}$ auf den Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ an, um die Punkte der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$, beschrieben in *geographischen Koordinaten* (Greenwich: $\varphi = 0$) zu erhalten.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3 (Inverse Matrizen)

Invertiere folgende Matrizen durch Berechnung der Determinante und Adjunkte:

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

Aufgabe 4.4 (Orthogonale Matrizen)

a) Zeige, dass die Matrix $C := \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. Benütze diese Eigenschaft, um das Gleichungssystem

$$x + 2y + 2z = 3 \quad , \quad 2x + y - 2z = 6 \quad , \quad -2x + 2y - z = -3$$

zu lösen.

b) Zeige, dass die Matrix $E := \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}$ orthogonal ist, und prüfe nach, dass die Spalten und Zeilen orthonormale Basen bilden.

c) Zeige, dass eine Spiegelung der kartesischen Koordinaten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ an der (x, y)-Ebene eine orthogonale Transformation ist, mit Determinante -1.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.5 (Unitäre Matrizen)

a) Zeige, dass die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unitär ist, falls gilt:

$$\overline{a} = \frac{d}{D} \quad , \quad \overline{b} = -\frac{c}{D} \quad , \quad \overline{c} = -\frac{b}{D} \quad , \quad \overline{d} = \frac{a}{D} \; ,$$

wobei $D := ad - bc$.

b) Zeige, dass die Matrix

$$F := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$$

unitär ist, und prüfe nach, dass die Spalten und Zeilen orthonormale Basen bilden.

c) Zeige, dass das Produkt zweier unitärer Matrizen $A, B \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ wieder eine unitäre Matrix ist.

(4 Punkte)