Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 3 (Aufgaben 3.1 - 3.4)

Abgabe in den Übungen am 2.05.07

Aufgabe 3.1 (Dreiecksungleichung)

a) Beweise die verschärfte Dreiecksungleichung

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \; \leq \|x \pm y\| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

b) Es seien a, b, c, d vier Punkte im $\mathbb{R}^n$. Wir setzen
$l_1 := \|a - b\|$, $l_2 := \|b - c\|$, $l_3 := \|c - d\|$, $l_4 := \|d - a\|$,
außerdem $d_1 := \|a - c\|$, $d_2 := \|b - d\|$. Beweise die Vierecksungleichung:

$$|\ l_1 - l_3\ | \leq d_1 + d_2\ .$$

(Tip: Skizze für $n = 2$; die verschärfte Dreiecksungleichung in a) zweimal anwenden).

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2 (Norm)

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Maximumnorm* durch $\|x\|_* := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

a) Zeige, dass $\|x\|_*$ eine Norm ist, d.h. die Axiome einer Norm erfüllt sind.

b) Was ist der *Einheitsball* $\{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ \|x\|_* < 1\}$? Skizziere ihn für $n = 2$.

c) Zeige, dass gilt: $\|x\|_* \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_*$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
(Tip: vergleiche $\|x\|_*^2$ mit $\|x\|^2$).

(6 Punkte)

Aufgabe 3.3 (Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Zeige:

i) $\langle w\, ,\, (u \times v)\rangle = \langle v\, ,\, (w \times u)\rangle = \langle u\, ,\, (v \times w)\rangle$

ii) $u \times (v \times w) = \langle u\, ,\, w\rangle v - \langle u\, ,\, v\rangle w$

iii) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$

(3 Punkte)

Aufgabe 3.4 (Orthonormalisierung)

Sei V der Vektorraum aller Polynomfunktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ vom Grade ≤ 3 mit Skalarprodukt gegeben durch:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \ .$$

Benutze das Orthonormalisierungsverfahren, um aus der Basis

$$\{f_1 = 1 \quad , \quad f_2 = x \quad , \quad f_3 = x^2 \quad , \quad f_4 = x^3\}$$

eine orthonormale Basis zu bilden.

Definiere den Abstand zwischen zwei Vektoren in V durch

$$d(f,g) := \|f - g\| = \sqrt{\langle f - g \, , \, f - g \rangle} \ .$$

Zeige:

$$d\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{20} \ , \ x^3\right) = \frac{1}{20\sqrt{7}} \ .$$

(7 Punkte)