Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 2 (Aufgaben 2.1 - 2.4)

Abgabe in den Übungen am 25.04.07

Aufgabe 2.1 (Integration)

Zeige, dass

a) $H = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-1}\, dx = \tfrac{1}{3}\ln\left((x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}\right) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}} \ + \ \text{const.}$

(Partialbruchzerlegung und integration einer logarithmische Ableitung).

b) $I = \displaystyle\int \frac{4x^5}{x^4-2x^2+1}\, dx \ = \ 2x^2 - \frac{2}{x^2-1} + 4\ln|x^2-1| \ + \ \text{const.}$

(Polynomdivision mit Rest und Partialbruchzerlegung).

c) $J = \displaystyle\int e^{\alpha t}\cos(\beta t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos(\beta t) + \beta\sin(\beta t)\right) \ + \ \text{const.},$

$\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (zweimal hintereinander partiell integriere).

Nun berechne einfacher: $\int e^{(\alpha+i\beta)t}dt$ und trenne Real- und Imaginärteile.

d) $K = \displaystyle\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \ + \ \text{const.}$ (Substitution: $\tan\frac{t}{2} := \tau$).

(6 Punkte)

Aufgabe 2.2 (Gerade/Ungerade Funktionen)

Die Funktion $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$ gilt, und *ungerade* falls dagegen $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$ ist, wie z.B. cosinus und sinus.

a) Beweise: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gerade (bzw. ungerade), so ist $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade (bzw. gerade).

b) Sei $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige durch Substitution:

i) Ist f gerade, so ist $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$.

ii) Ist f ungerade, so ist $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2.3 (Hyperbelfunktionen)

Die Funktionen *sinus hyperbolicus*, $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und *cosinus hyperbolicus*, $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, werden definiert durch

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \; .$$

a) Skizziere die Graphen der beiden Funktionen.

b) Gib eine Potenzreihenentwicklung für eine der beiden Funktionen an.

c) Zeige: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

d) Zeige, dass sowohl sinh als auch cosh der Differentialgleichung $f'' = f$ genügt.

e) Begründe, dass sinh streng monoton wachsend ist, und folgere daraus, dass eine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu sinh gibt.

f) Beweise: $\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.
Tip: Setze $e^x = \sinh x + \cosh x$ *in c) ein.*

g) Berechne: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$. (*Tip: Substituiere* x *durch* $\sinh t$ *und benutze c) und f)).*

(7 Punkte)

Aufgabe 2.4 (Integrationsregeln)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \; dx \; .$$

b) Berechne zunächst I_0, I_1. Mit Hilfe partieller Integration beweise die Rekursionsformel:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2 \; .$$

Folgere, dass für $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{(2k-1)}{2k} \quad \text{für } k \text{ gerade} \\ I_{2k+1} &= 1 \cdot \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{(2k)}{2k+1} \quad \text{für } k \text{ ungerade,} \end{aligned}$$

und somit gilt:

$$\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = \frac{2}{\pi}\prod_{n=1}^{k} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \; . \tag{1}$$

Nun, folgere aus $\quad \cos^{2k} x \geq \cos^{2k+1} x \geq \cos^{2k+2} x \; , \; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
(skizziere zusätzlich $\cos^n x \; , \; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ für $n = 0, 1, 2$),
dass $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1$.

Aus (1) folgt dann die Wallissche Produktdarstellung für π:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1} \; .$$

(4 Punkte)