Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 15 (Aufgaben 15.1 - 15.4)

(Zusatzblatt: dient dem Selbststudium)

Aufgabe 15.1 (Greenscher Satz)

Berechne den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Hypozykloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eingeschlossen ist.

Hinweis: Benutze die Parametrisierung

$$x = a\cos^3\vartheta \quad , \quad y = a\sin^3\vartheta \quad , \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi \ .$$

[Lösung: $\frac{3}{8}\pi a^2$.]

Aufgabe 15.2 (Stokesscher Satz)

Berechne mit Hilfe des Stokesschen Satzes das Kurvenintegral

$$\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz \ ;$$

C ist die Schnittkurve des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$ mit der Ebene $x+y+z=1$, und die Orientierung entspricht der Bewegung gegen den Uhrzeigersinn in der xy-Ebene.

Hinweis: Die Kurve C ist der Rand der Fläche S, die durch $z = 1-x-y = f(x,y)$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ definiert ist. Das Integral über D lässt sich mit Polarkoordinaten leicht berechnen.

[Die Lösung ($\frac{3}{2}\pi$) lässt sich überprüfen, indem C durch die Parametrisierung

$$x = \cos t \ , \quad y = \sin t \ , \quad z = 1 - \sin t - \cos t \ , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

beschrieben wird.]

Aufgabe 15.3 (Gaußscher Satz)

a) Sei $F = (2x\,,\,y^2\,,\,z^2)$ ein Vektorfeld aus $C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ und S die Oberfläche der Einheitskugel $x^2+y^2+z^2=1$. Berechne $\int_S \langle F\,,\,dS\rangle$.

[Lösung: $\frac{8}{3}\pi$.]

b) Berechne $\displaystyle\int_{\partial W} (x^2+y+z)\,dA$, wobei W die Kugel $x^2+y^2+z^2 \le 1$ ist.

[Tip: Um den Divergenzsatz anwenden zu können, müssen wir auf W ein Vektorfeld F mit $\langle F\,,\,\widehat{n}\rangle = x^2+y+z$ finden, wobei $\widehat{n}$ der äußere Normaleneinheitsvektor von ∂W ist.]

Aufgabe 15.4 (Soliton)

Solitonen sind Wellen, die sich fortbewegen ohne Änderung ihrer Form. Sie beschreiben z.B. Tsunamis. Betrachte die Soliton-Funktion

$$\begin{aligned} u \,:\, \mathbb{R}^2 &\;\longrightarrow\; \mathbb{R} \\ (x,t) &\;\longmapsto\; u(x,t) = \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sech}^2\left[\frac{k}{2}(x - k^2 t)\right] \;,\; k \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Finde einen alternativen Ausdruck für u mittels der Exponentialfunktion, und finde damit $\tau(x,t)$, sodass

$$u(x,t) = -\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\ln\tau(x,t)\;.$$

Skizziere den Graphen von $u_0(x) := u(x,0)$. Beschreibe den Graphen von $u_T(x) := u(x,T)$ für einen festen Zeitpunkt $T > 0$. Wie hängen Höhe und Geschwindigkeit des Solitons von k ab?

b) Berechne die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial u}{\partial t} =: u_t\,,\ \dfrac{\partial u}{\partial x} =: u_x\,,\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} =: u_{xxx}\,.$

Prüfe nach, dass $u_t + k^2 u_x = 0$. Was bedeutet das? (Vgl. Aufgabe 12.4).

Nun zeige: $u(x,t)$ erfüllt die Korteweg–de Vries Gleichung

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0\;.$$