Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007   Blatt 14 (Aufgaben 14.1 - 14.6)

Aufgabe 14.1 (Gaußintegral)

Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := e^{-x^2-y^2}$ auf den Bereichen

$$B_R := \left\{(x,y) \mid x, y \geq 0\ ,\ x^2+y^2 \leq R^2\right\} \quad , \quad Q_R := [0,R]\times[0,R] \quad , \quad R \in \mathbb{R}\,.$$

a) Berechne

$$\int_{B_R} f\,d\mu := \int_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx\,dy\ .$$

(Tip: Polarkoordinaten!)

b) Zeige:

$$\int_{Q_R} f\,d\mu := \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2 .$$

und

$$\int_{B_R} f\,d\mu \leq \int_{Q_R} f\,d\mu \leq \int_{B_{\sqrt{2}R}} f\,d\mu$$

und benutze diese Ungleichungen, um das uneigentliche Integral der Gaußschen Funktion

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

zu berechnen.

c) Forme I durch die Substitution $x := t^{1/2}$, $0 \leq t < \infty$ um, um zu zeigen, dass

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,dt =: \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) .$$

Wir erhalten so den Wert der Gammafunktion (s. Aufgabe 9.3) $\Gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$;

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt \quad , \quad \alpha > 0\ ,$$

an der Stelle $\alpha{=}\frac{1}{2}$. Mit der Gammafunktion läßt sich z.B. das Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ schön darstellen als:

$$\Omega_n = \frac{\omega_n}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\ ,$$

wobei ω_n die Oberfläche der Einheitssphäre ist.

Aufgabe 14.2 (Koordinatentransformation)

Zeige: das Trägheitsmoment der Ellipse $D := \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ ist gegeben durch

$$\Theta := \int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)\,.$$

(Tip: In sinngemäßer Abwandlung von Polarkoordinaten verwende für D die Parameterdarstellung $(t, \phi) \mapsto (x := at\cos\phi\ ,\ y := bt\sin\phi)$).

Aufgabe 14.3 (Linienintegral)

Es sei ∂Q der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Rand des Quadrats $Q := [0,1] \times [0,1]$ in der (x,y)-Ebene. Berechne das Linienintegral (oder Wegintegral) längs der Kurve ∂Q des Vektorfeldes $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ ;\ f(x,y) := (x^3 + xy^2\ ,\ x^2y - y^5)$,

$$I_\gamma := \int_\gamma f \cdot dx \qquad \text{für} \qquad \gamma = \partial Q.$$

Nun berechne I_γ für $\gamma = \partial T$, den Rand des Dreiecks T zwischen den Punkten $(0,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$, auch im Gegenuhrzeigersinn. Gib eine Erklärung der erhaltenen Resultate.

Aufgabe 14.4 (Flächeninhalt einer Fläche)

Betrachte den Parameterraum

$$D := \{(r, \vartheta \mid 0 \leq r \leq 1\ ,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

einer Parametrisierung eines Kegels $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(r, \vartheta) \mapsto (\ x = r\cos\vartheta\ ,\ y = r\sin\vartheta\ ,\ z = r\ )\,.$$

Ist φ im Inneren von D injektiv? Berechne den Flächeninhalt der Oberfläche des Kegels.

Aufgabe 14.5 (Harmonische Funktionen)

Eine Funktion, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die die Laplace-Gleichung

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$$

erfüllt, wird *harmonisch* genannt.

Zeige: Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch, d.h. erfüllt $f(x,y)$ die zweidimensionale Laplace-Gleichung $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, dann ist $\varphi(x,y) := f\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ für $(x,y) \neq (0,0)$ auch harmonisch.

Aufgabe 14.6 (Wellen)

Zeige: für beliebige $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}\ ,\ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}\ ,\ r = \|x\|\ ,\ c > 0$, definiert

$$\varphi(x,t) := \frac{1}{r}\left[f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung. Wie sehen diese Wellen aus? (Vgl. Aufgabe 12.4).