Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 12 (Aufgaben 12.1 - 12.4)

Abgabe in den Übungen am 4.7.07

Aufgabe 12.1 (Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$)

Seien $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (skalare Felder) und $F, G, H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (Vektorfelder), alle C^2-Funktionen. Zeige mit Hilfe von ϵ_{ijk} und δ_{ij}:

1) $\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F + F \times \operatorname{rot} G + G \times \operatorname{rot} F$

2) $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \nabla f$

3) $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$

4) $\operatorname{div}\ \operatorname{rot} F = 0$

5) $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + \nabla f \times F$

6) $\operatorname{rot}(F \times G) = F \operatorname{div} G - G \operatorname{div} F + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G$

7) $\operatorname{rot}\ \operatorname{rot} F = \operatorname{grad}\ \operatorname{div} F - \nabla^2 F$

8) $\operatorname{rot} \nabla f = 0$

9) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

(4 Punkte -1 für jede Fehler)

Aufgabe 12.2 (Taylorpolynom)

Bestimme das Taylorpolynom 3. Ordnung der Funktion

$$f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; \quad f(x, y) := \frac{x - y}{x + y}$$

um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Gib die Form des Restglieds an.

(5 Punkte)

Aufgabe 12.3 (Kritische Punkte)

Bestimme die lokalen Extrema der folgenden Abbildungen

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \left(4x^2 + y^2\right) e^{-x^2-4y^2}\ .$$

b) $f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x, y < \frac{\pi}{2}\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \sin x + \sin y + \sin(x + y)\ .$$

(6 Punkte)

Aufgabe 12.4 (Wellengleichung)

Sei $\varphi(x,t)$ eine C^2-Funktion zweier Variabler und $x = \zeta + \eta$, $t = \frac{1}{c}(\zeta - \eta)$, $c \in \mathbb{R}$.
Zeige:

a) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \ .$$

b) $\varphi(x,y) = f(x - ct) + g(x + ct)$, für beliebige Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, erfüllt die zweidimensionale Wellengleichung $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

Nun sei
$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto \varphi(x,t) \end{aligned}$$
eine C^2-Funktion von 3+1 Variablen $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, und sei $a \in \mathbb{R}^3$, $\|a\| = 1$, ein Einheitsvektor. Zeige, dass die Funktion $\varphi(x,y) = f(a \cdot x - ct) + g(a \cdot x + ct)$, für beliebige $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, eine Lösung der dreidimensionale Wellengleichung $\varphi_{tt} = c^2 \Delta \varphi$ liefert. Hier ist $c > 0$ eine Konstante und $\Delta := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ bezeichnet den Laplace–Operator auf $\mathbb{R}^3$.
Warum nennt man diese Lösungen *ebene Wellen*?

(5 Punkte)