Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 11 (Aufgaben 11.1 - 11.5)

Abgabe in den Übungen am 27.6.07

Aufgabe 11.1 (Kettenregel)

Eine Ente schwimmt innerhalb des Kreises $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $x = \cos t$, $y = \sin t$, und die Temperatur des Wassers ist durch $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 e^y - xy^3$ gegeben. Bestimme die Temperaturänderung $\frac{df}{dt}$, die die Ente spürt

a) mit Hilfe der Kettenregel $(f \circ c)'(t) = \langle \nabla f\,(c(t))\ ,\ c'(t) \rangle$

b) in dem $f \circ c$ als Funktion von t geschrieben wird, und dann differenziert.

Auf die gleiche Weise verifiziere die Kettenregel in jedem der folgenden Fälle:

$a)\qquad f(x,y) = xy\ , \qquad c(t) = \big(e^t\ ,\ \cos t\big)$

$b)\qquad f(x,y) = e^{xy}\ , \qquad c(t) = \big(3t^2\ ,\ t^3\big)$

$c)\qquad f(x,y) = (x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2}\ , \qquad c(t) = \big(e^t\ ,\ e^{-t}\big)$

$d)\qquad f(x,y) = xe^{x^2+y^2}\ , \qquad c(t) = (t\ ,\ -t)\ .$

(5 Punkte)

Aufgabe 11.2 (Kettenregel)

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $c(t)$ eine C^2-Kurve in $\mathbb{R}^2$. Zeige, mit $c(t) = (x(t)\ ,\ y(t))$, durch zweimalige Anwendung der Kettenregel, dass

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t) = f_{xx}(\frac{dx}{dt})^2 + 2f_{xy}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + f_{yy}(\frac{dy}{dt})^2 + f_x\frac{d^2x}{dt^2} + f_y\frac{d^2y}{dt^2}\ ,$$

wobei $f_x := \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xy} := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, usw.

b) Beweise mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x f(x,y)\,dy = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy\ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 11.3 (stetig partiell differenzierbar $\not\Leftarrow$ differenzierbar)

In der Vorlesung wurde die Stetigkeit der partiellen Ableitungen als hinreichend für die Differenzierbarkeit bewiesen. Sie ist allerdings *nicht* notwendig.

Betrachte

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & x^2+y^2>0 \\ 0 & x=y=0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige: f ist in $(0,0)$ differenzierbar, aber $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind in $(0,0)$ nicht stetig.

(4 Punkte)

Aufgabe 11.4 (Vertauschung von partiellen Ableitungen)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Berechne

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \,.$$

Wann kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen?

(4 Punkte)

Aufgabe 11.5 (Gravitationspotential)

Betrachte das Newton'sche Gravitationspotential

$$\begin{aligned} V\colon\ \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto V(x) := -\frac{\alpha}{r}\,, \quad \alpha := GmM > 0\,, \quad r = \|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,, \end{aligned}$$

erzeugt durch eine im Ursprung $0 \in \mathbb{R}^3$ befindliche Masse M, die auf eine Masse m in $x \in \mathbb{R}^3$ einwirkt, wobei G die Gravitationskonstante ist.

a) Bestimme die Niveauflächen von V?

b) Berechne die Gravitationskraft $F = -\operatorname{grad} V$ und begründe kurz, dass ihre Richtung in jedem Punkt senkrecht zur Niveaufläche von V steht?

c) Zeige, dass die Funktion $V(x)$ für $x \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ die Laplace-Gleichung

$$\Delta V := \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0$$

erfüllt.

(3 Punkte)