Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik II für Physiker und Geowissenschaftler
SoSe 2007 Blatt 1 (Aufgaben 1.1 - 1.7)

****

Abgabe in den Übungen am 18.04.07

Aufgabe 1.1 (Nicht alle Funktionen sind differenzierbar)

a) Zeige, dass $\varphi(x) = |x|^3$ in $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar ist (was sind die Ableitungen?), aber an der Stelle $x = 0$ nur zweimal (nicht dreimal) differenzierbar ist.

b) Zeige, dass die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^3$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & \text{für} \quad x < 0 \, , \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ **nicht** differenzierbar ist.

(Betrachte die Ableitung als Grenzwert von $\frac{\varphi(x_n)-\varphi(0)}{x_n}$ für $x_n = \pm\frac{1}{n}$).

(2 Punkte)

Aufgabe 1.2 (Hauptsatz)

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeige, dass f streng monoton wächst. (Tip: Hauptsatz auf f' anwenden.)

b) Bestimme: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Tip: Verwende das Resultat von Aufgabe 15.4 b) (WS).)

(3 Punkte)

Aufgabe 1.3 (Integrationsregeln)

Berechne gegebenfalls mit Hilfe der Substitutionsregel und partieller Integration:

$$I_1 := \int_0^2 x \exp(x^2)\ dx \quad , \quad I_2 := \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\ dx \quad , \quad I_3 := \int_0^\pi e^{\sin x} \cos x\ dx\ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 1.4 (N-te Wurzeln von Eins)

Betrachte die Polynome in $\mathbb{C}_N[Z]$, $P_N(Z) := Z^N - 1$, $Z \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$. Die Nullstellen in $\mathbb{C}$ nennt man die **N-ten Wurzeln von Eins**. Benutze die Polardarstellung der komplexen Zahlen, um diese zu bestimmen. Markiere auf einer Skizze der $\mathbb{C}$-Ebene die 5. und 6. Wurzeln von Eins.
Zeige, dass diese geometrisch durch ein einbeschriebenes (bzw. umschriebenes) reguläres Polygon in (bzw. um) den Einheitskreis gefunden werden können.
Argumentiere nun, dass es eine Intervallschachtelung gibt, um den Kreisumfang zu bestimmen. Im wesentlichen hat Archimedes auf dieser Weise eine Approximation von π errechnet.

(3 Punkte)

Aufgabe 1.5 (Inverse Matrizen)

Berechne die Inverse A^{-1}, B^{-1} und C^{-1} zu den 3×3–Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3/5 & -20/65 & 48/65 \\ 4/5 & 15/65 & -36/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & i & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 1.6 (Berührung in zwei Punkten)

Zeige, dass es zu gegebenen Zahlen $a_1, a_2 \neq a_1, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ ein eindeutiges Polynom $P(x) \in \mathbb{Q}_3[X]$ gibt, für das gilt:

$$P'(a_1) = \alpha \ , \quad P(a_1) = \beta \ , \quad P'(a_2) = \gamma \ , \quad P(a_2) = \delta \ .$$

Anleitung:

(1) Betrachte die lineare Abbildung
$L : \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}^4 \ , \ L(P) := (P'(a_1) \ , \ P(a_1) \ , \ P'(a_2) \ , \ P(a_2)) \ .$
Die Vektorräume $\mathbb{Q}_3[X]$ und $\mathbb{Q}^4$ haben dieselbe Dimension. Benutze den Dimensionssatz, um zu zeigen, dass L injektiv ist.

(2) Seien nun e_1, e_2, e_3, e_4 die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{Q}^4$. Die Abbildung L ist sicher dann surjektiv, wenn $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathrm{Im}\ L$. Also finde vier spezielle Polynome $P_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$, die unter der Abbildung L die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{Q}^4$ liefern: $L(P_i) = e_i$. Finde zunächst P_1. (Hinweis: beachte die Nullstellen: wieviele und wo?) Dann betrachte $Q(X) := (X - a_2)^2$, und merke, dass $L(Q)$ sich als Linearkombination von $e_1 = L(P_1)$ und $e_2 = L(P_2)$ darstellen läßt. So ist P_2 zu bestimmen. Genauso sind P_3, P_4 zu finden. Die Aufgabe ist nun leicht lösbar.

(3 Punkte)

Aufgabe 1.7 (Wiederholung)

Es seien U, V, W K-Vektorräume, $F : U \to V$ und $L : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige:

a) $L \circ F$ ist linear.

b) F ist injektiv, genau dann wenn $\ker(F) = 0$ gilt.

c) $\ker(F) \subset \ker(L \circ F)$.

d) $\mathrm{Im}(L \circ F) = L(\mathrm{Im}(F))$.

e) Wenn $L \circ F$ injektiv ist, ist F injektiv.

f) Wenn $L \circ F$ surjektiv ist, ist L surjektiv.

Sei nun $W = U$.

g) Wenn $(L \circ F)(u) = u$ für alle $u \in U$ gilt, dann ist F injektiv.

h) Wenn $(F \circ L)(v) = v$ für alle $v \in V$ gilt, dann ist F surjektiv.

(3 Punkte)