Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 9 (Aufgaben 9.1 - 9.7)

****

Abgabe in den Übungen am 19./20.12.06

Die angegebenen Punktwerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.

Aufgabe 9.1 (Ableitung rationaler Funktionen)

Sei
$$f(x) := \frac{1+ax+bx^2}{1-(1-a)x} \ .$$

a) Differenziere f zweimal und bestimme a, b, so dass
$$f(0) = f'(0) = f''(0) \ \text{ und } \ f'(1) = f(1) \ \text{ gilt.}$$

b) Zeige, dass für die $a{>}0$ Lösung im Intervall $0 \le x \le 1$ gilt: $f'(x)/f(x) \le 1$.

c) Vergleiche numerisch $f(x), f(x/2)^2$ und e^x auf $[0,1]$ (ohne Punkte).

(3 Punkte)

Aufgabe 9.2 (Ungleichungen und Monotonie)

a) Zeige unter der Voraussetzung $0 \le a, b$, dass $a < b$ genau dann gilt, wenn $a^3 < b^3$.

b) Zeige, dass die Funktion $x \mapsto x^3$ monoton wachsend ist.

c) Zeige hingegen, dass die Funktion $x \mapsto x^4$ *nicht* monoton wachsend ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 9.3 (Monotonie)

Mit Hilfe der Wachstumsrate f'/f wurde in der Vorlesung gezeigt: $(1+x/n)^n$ ist monoton wachsend in n. Bestimme analog die Monotonie der Folge: $\{h_n(x)\}$ mit

$$h_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}\right)^n \quad \text{für} \quad x \ge 0 \ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 9.4 (Abweichung von der Sehne und 2. Ableitung)

In der Vorlesung wurde bewiesen: aus $f'' \ge 0$ folgt : f liegt oberhalb jeder Tangente.

Jetzt beweise:

aus $f'' \ge 0$ folgt : In jedem Intervall $[a, b]$ liegt f unterhalb der Sehne

$$S_{ab}(x) := \frac{f(a)\cdot(b-x) + f(b)\cdot(x-a)}{b-a} = x\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \ .$$

Also: $f(x) \le S_{ab}(x)$.

(Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $h(x) := f(x) - S_{ab}(x)$ in den Intervallen $[x, b]$ und $[a, x]$.)

(3 Punkte)

Aufgabe 9.5 (Schmiegparabeln schneiden)

Sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 3$. Betrachte die *Schmiegparabel* an der Stelle $x{=}a$ gegeben durch

$$s_a(x) := P(a) + P'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} P''(a) \cdot (x-a)^2 \ .$$

Bemerke, dass $s_a(a) = P(a)\,,\ s'_a(a) = P'(a)\,,\ s''_a(a) = P''(a)$ gilt. Setze $P'''(a) \neq 0$ voraus und zeige, dass es ein Polynom $Q_a(x)$ gibt, das die Gleichung

$$P(x) - s_a(x) = (x-a)^3 \cdot Q_a(x)$$

erfüllt. Verifiziere: $Q_a(a) \neq 0$. Folgere, dass jede solche Schmiegparabel den Graph von P berührt und durchquert. Präzisiere die Aussage: Im allgemeinen (falls $P''(a) \neq 0$) wird P *besser* von der Schmiegparabel berührt als von der Tangente.

(3 Punkte)

Aufgabe 9.6 (Koeffizienten an der Entwicklungsstelle)

Beweise mittels Induktion für alle $a \in \mathbb{Q}$ die binomische Formel (vgl. Aufgabe 6.4),

$$(a+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} X^k \ .$$

Wende diese Formel auf $X = a + (X - a)$ an, um auf eine andere Weise als in Aufgabe 7.5 zu zeigen, dass es Zahlen $b_k \in \mathbb{Q}$ gibt mit

$$P(X) - P(a) = \sum_{k=1}^{n} b_k (X-a)^k$$

Wir sagen dazu auch, dass wir das Polynom $P(X)$ an der Stelle $X{=}a$ entwickeln. Wie hängen die Werte $P^{(k)}(a)$, der k-ten Ableitung von P an der Stelle a mit den Entwicklungskoeffizienten b_k zusammen?

(3 Punkte)

Aufgabe 9.7 (Polynome in der Basis $\{\mathbf{1}, (\mathbf{x}-\mathbf{a}), \ldots, (\mathbf{x}-\mathbf{a})^{\mathbf{n}}\}$)

Es sei $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt.

a) Zeige mittels linearer Abbildungen (Differenzieren und Auswerten an der Stelle $x{=}a$), dass $\{1,\ (x-a),\ \ldots,\ (x-a)^n\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}_n[X]$ ist, und sich somit jedes Polynom $P(x) \in \mathbb{Q}_n[X]$ als Linearkombination dieser Basisvektoren schreiben läßt. Das heißt, es gibt Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-a)^j \ .$$

b) Gib einen expliziten Algorithmus für die Berechnung der Koeffizienten b_j bezüglich der Basis $\{(x-a)^j\ , j = 0, \ldots, n\}$ aus dem Koeffizienten a_k bezüglich der Basis $\{x^k\ , k = 0, \ldots, n\}$ an.
(Hinweis: Benutze die Binomische Formel für $((x-a)+a)^k$).

(3 Punkte)