Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 8 (Aufgaben 8.1 - 8.7)

****

Abgabe in den Übungen am 12./13.12.06

Die angegebenen Punktwerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.

Aufgabe 8.1 (Lineare Unabhängigkeit)

a) Zeige, dass die rationalen Funktionen

$$f_1(x) = \frac{4711}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{6783}{x-2}, \quad f_3(x) = \frac{5/9}{x-3}$$

linear unabhängig sind. Bearbeitung mittels eines 3×3–Gleichungssystems gilt als Notlösung. Beachte, dass falls die Bilder einer linearen Abbildung eines Vektorraumes $\{L(v_1), \ldots, L(v_k)\}$ linear unabhängig sind, so sind auch die Urbilder $\{v_1, \ldots, v_k\}$ stets linear unabhängig.

b) Bestimme $A, B, C \in \mathbb{Q}$ so dass

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = A\frac{4711}{x-1} + B\frac{6783}{x-2} + C\frac{5/9}{x-3}$$

und zeige mit a) die Eindeutigkeit dieser Lösung. (2 Punkte)

Aufgabe 8.2 (Spann und linear unabhängige Vektoren)

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in einem K-Vektorraum V und die Vektoren $w_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} v_k \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ $(a_{jk} \in K;\ j = 1, ..., n)$ seien ebenfalls linear unabhängig.

a) Sei $u \in V \setminus \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$. Zeige, dass $v_1, \ldots, v_k, u$ auch linear unabhängig sind.

b) Zeige, dass es ein i gibt mit $a_{i1} \neq 0$. Nach Umbenennung darf $a_{11} \neq 0$ angenommen werden. Berechne v_1 in Abhängigkeit von $w_1, v_2, \ldots, v_n$.

c) Zeige, dass die Vektoren $a_{11}w_2 - a_{21}w_1,\ a_{11}w_3 - a_{31}w_1, \ldots, a_{11}w_n - a_{n1}w_1$ linear unabhängig sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 8.3 (Tangenten, nicht immer auf einer Seite)
Betrachte die Polynomfunktion

$$f(x) = x^3 - x.$$

a) Bestimme die Gleichung für die Tangente im Punkt $(a, a^3 - a)$.

b) Zeige, dass für alle $a \neq 0$ die Tangente den Graphen an einer weiteren Stelle $b\,(\neq a)$ schneidet. (3 Punkte)

Aufgabe 8.4 (Basen von $\mathbb{Q}_3[X]$)
Begründe kurz, welche der folgenden Mengen eine Basis, ein Erzeugendensystem oder linear unabhängig in $\mathbb{Q}_3[X]$ sind (dies kann *wirklich* ohne Gleichungssysteme beantwortet werden):

a) $\{1,\ x-1, x^2-5x,\ 17x^3+273x^2+101\}$

b) $\{x(x-1)(x-2),\ x(x-1)(x-3),\ 56x(x-1)(x-5)\}$

c) $\{x(x-1)(x-2),\ x(x-1)(x-3),\ x(x-2)(x-3),\ (x-1)(x-2)(x-3)\}$

d) $\{x^3,\ x^3-x^2,\ x^3-5x^2+37x,\ x^3-400x^2+1,\ 1\}$

e) Die Menge $\mathbb{Q}_2[X]$

f) $\{1,\ x,\ x^2\}$ (Bemerke: dies ist eine Basis, aber von $\mathbb{Q}_2[X]$)

g) $\{1, x, 456x^3+345x^2+187x+471\}$

h) $\{1,\ 1+x,\ 1+x+\frac{1}{2}x^2,\ 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\}$. (3 Punkte)

Aufgabe 8.5 (Ableitungsregeln bei gröberen Fehlern)

In der Vorlesung wurde die Produktregel bewiesen, d.h. für zwei Funktionen $f_i(x), i = 1, 2$, die an der Stelle $x = a$ (mit quadratischem Fehler) differenzierbar sind, ist auch $f_1 \cdot f_2$ so gut differenzierbar, und es gilt:

$$(f_1 \cdot f_2)'(a) = f_1(a) \cdot f_2'(a) + f_1'(a) \cdot f_2(a)\ .$$

Wir setzen jetzt gröbere Fehler voraus, nämlich: Es gibt ein $c > 0$ (wahrscheinlich klein) und $K > 0$ (vielleicht groß), so dass für alle $x \in [a-c\,,\ a+c]$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|f_i(x) - (f_i(a) + f_i'(a) \cdot (x-a))| \leq K_i|x-a|^{3/2}\ .$$

Zeige (vgl. Vorlesung) die Produktregel unter dieser Voraussetzung.
Natürlich darf jetzt auch der Unterschied zwischen $f_1 \cdot f_2$ und der Tangente von $f_1 \cdot f_2$ bei a ein so grober $(\text{Abstand})^{3/2}$-Fehler sein.

(3 Punkte)

Aufgabe 8.6 (Parabel berührend geschnitten)

Betrachte an einer Stelle $x = a \neq 0$ die Parabel $P(x) = x^2$ und bestimme zu jedem a (durch Wahl von x_m, y_m, r) den Halbkreis

$$h(x) = y_m - \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}\ ,$$

der $h(a) = P(a)$, $h'(a) = P'(a)$, $h''(a) = P''(a)$ erfüllt. (Natürlich können hier die Differentiationsregeln und $\sqrt{x}\,' = 1/(2\sqrt{x})$ benützt werden). Dieser Halbkreis berührt also die Parabel.

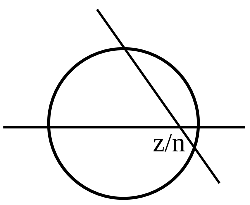
Zeige, dass für $a \neq 0$ der Kreis die Parabel durchquert, d.h., dass $P - h$ bei $x = a$ das Vorzeichen wechselt. Setze dazu die Parabelpunkte (x, x^2) in die Kreisgleichung ein und klammere möglichst viele $(x-a)$ Faktoren aus. Was passiert bei $a = 0$?

(3 Punkte)

Aufgabe 8.7 (Rationale Kreispunkte)

Gegeben sei der Einheitskreis $x^2+y^2 = 1$ und eine Gerade, die den Punkt $(0, 1)$ des Kreises mit dem rationalen Punkt $(z/n, 0)$ der x-Achse verbindet ($z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$). Berechne den zweiten Schnittpunkt der Gerade mit dem Kreis und zeige, dass seine beiden Koordinaten rational sind.

(Wie liefert jeder rationale Punkt auf dem Einheitskreis (vgl. obige Berechnung) ein pythagoräisches Tripel $a, b, c \in \mathbb{N}, a^2 + b^2 = c^2$?)



(3 Punkte)