Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 7 (Aufgaben 7.1 - 7.8)

****

Abgabe in den Übungen am 5./6.12.06

Die angegebenen Punktwerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.

Aufgabe 7.1 (Mehr über lineare Abhängigkeit)

Für $q \in \mathbb{Q}$ sei

$$W_q : \mathbb{Q}_2[X] \to \mathbb{Q} \quad , \quad P(X) \mapsto P(q)$$

also, W_q ordnet einem Polynom seinen Wert an der Stelle q zu. W_q ist ein Element von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ und da $\mathbb{Q}$ ein Vektorraum ist, ist $\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ auch ein Vektorraum.

a) Zeige: Je drei der Elemente $W_{-1}, W_0, W_1, W_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ sind linear unabhängig.

b) Zeige: Alle vier Elemente $W_{-1}, W_0, W_1, W_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ sind linear abhängig.

(2 Punkte)

Aufgabe 7.2 (Polynome)

a) Zeige, ohne Benutzung der Polynomdivision, dass es keine Polynome $P(X), Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, sodass

i) $X^5 + 5X^2 + 2 = (X-1)P(X)$

ii) $X^6 - 3X^5 + 2X^3 - 3X^2 + 7X - 7 = (X-1)^2 Q(X)$.

b) Betrachte $R(X) := X^5 - 4X^4 + 8X^3 - 10X^2 + 7X - 2$.

Was ist die Vielfachheit der Nullstelle $X{=}1$? Wie viele Nullstellen besitzt $R(X)$?

(2 Punkte)

Aufgabe 7.3 (Beispiel zu „wie gut approximiert")

Betrachte die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$.

a) Wie lautet die Gleichung für die Tangente $l_a(x)$, die den Graph von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ berührt?

b) Die Tangente $l_a(x)$ liefert eine Approximation für $\sqrt{x}$. Mit $a = 100$ berechne die Tangentenapproximation für $\sqrt{100.742}$.

c) Zeige, dass die Abweichung der Funktion $f(x)$ von ihrer Tangente an der Stelle a, $\mathrm{Abw}_f(x) := f(x) - l_a(x) \leq 0$ ist. Damit ist die in b) erhaltene Abschätzung für $\sqrt{100.742}$ offenbar zu gross.

d) Zeige, dass für $x \geq a$ die folgende quadratische Fehlerschranke existiert:

$$\mathrm{Abw}_f(x) \geq \frac{-(x-a)^2}{8a^{3/2}} .$$

Also ist die Abschätzung für $\sqrt{100.742}$ zwar zu gross, aber höchstens um $(0.742)^2/8000$.

(3 Punkte)

Aufgabe 7.4 (Geometrische Reihe und Induktion)

Die Summenformel der geometrischen Reihe ist Grundwissen: Für $x \neq 1$ gilt:

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x} \ .$$

a) Differenziere diese Formel und zitiere die benutzten Regeln.

b) Beweise die in a) erhaltene Formel erneut, jetzt durch Induktion.

(3 Punkte)

Aufgabe 7.5 (Polynomfaktorisierungen)

a) Beweise mittels Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}$:

$$X^n - a^n = (X - a) \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-k-1} a^k \ .$$

$\left(\text{Hinweis: Verwende} \quad \sum_{k=0}^{n+1} b_k := b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} b_k\right).$

b) Zeige unter Verwendung von a), dass sich für jedes Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ und für jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein $Q_a \in \mathbb{Q}[X]$ finden läßt, für das $P(X) - P(a) = (X - a)Q_a(X)$ gilt.

(3 Punkte)

Aufgabe 7.6 (Komposition von zwei linearen Abbildungen)

Betrachte folgende lineare Abbildungen:

$$A: \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_3[X] & \to & \mathbb{Q}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \quad , \quad B: \begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_2[X] & \to & \mathbb{Q}_3[X] \\ Q(X) & \mapsto & (X-1)Q(X) \end{array}$$

a) Bestimme den Kern (wo?) und das Bild (auch wo?) von $A \circ B$.

b) Bestimme den Kern und das Bild von $B \circ A$.

c) Bestimme $V = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \quad | \quad (B \circ A)(P) = P\}$ und zeige, dass V ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}_3[X]$ ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 7.7 (Polynome und Polynomfunktionen mod 7)

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_7)$ der Vektorraum aller Abbildungen $\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$ (Vorlesung: Die Menge aller Abbildungen von irgendeiner Menge M in einen Vektorraum V ist selbst ein Vektorraum). Jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{F}_7[X]$ liefert eine Abbildung $\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$, indem $x \in \mathbb{F}_7$ nach $P(x) \in \mathbb{F}_7$ abgebildet wird. So haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathbb{F}_7[X] &\to \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_7) \\ P(X) &\mapsto L(P) := (x \mapsto P(x)) \end{aligned}$$

a) Zeige, dass L eine lineare Abbildung ist.

b) Zeige, dass L surjektiv ist. (Bemerke den Unterschied zum üblichen Fall rationaler Koeffizienten: Jeder "*weiß*", dass es andere Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt als Polynome).

c) Zeige, dass L injektiv ist, wenn man L auf den Untervektorraum aller Polynome in $\mathbb{F}_7[X]$ mit Grad kleiner oder gleich 6 einschränkt. (Überladene Bezeichnung: $(\mathbb{F}_7)_6[X]$.)

d) Rechne nach, dass in $\mathbb{F}_7[X]$ gilt:

$$X^7 - X = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)$$

und folgere daraus, dass $L(X^7 - X) = 0$, was auch ganz anders ist, als bei den Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.8 (Definitionen)

Keine Abgabe, aber eine wichtige Übung: Inzwischen müssten die grundlegenden Definitionen längst verinnerlicht sein.

Schreibe in Schönschrift, aus dem Gedächtnis, die Definitionen von **Gruppe, Körper, Vektorraum, lineare Abbildung, linear abhängig, linear unabhängig** und **Basis** auf.

Nun korrigiere die Definitionen selbst und hänge das Blatt auf, wo es mindestens zweimal am Tag gelesen wird (z.B. gegenüber vom Klo!).

Wiederhole die Übung jeden Tag, bis alle Definitionen ohne Fehler wiedergegeben werden können.