Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 6 (Aufgaben 6.1 - 6.6)

****

Abgabe: in den Übungen am 28./29.11.06

Aufgabe 6.1 (Linear abhängig, linear unabhängig)

Betrachte $\mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und überprüfe folgende Systeme von Vektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit:

i) $(1,0,-1)$, $(1,2,1)$, $(0,-3,2)$

ii) $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$

iii) $(9,1,5)$, $(17,11,14)$, $(18,2,10)$

iv) $(1,9,7)$, $(2,3,4)$, $(9,7,6)$, (6,6,6) . (2 Punkte)

Aufgabe 6.2 (Polynomdivision)

a) Bestimme Polynome $P \in \mathbb{Q}[X]$ (vom Grade ?), damit:

i) $X^4 - a^4 - 4a^3(X-a) = (X-a)^2 \cdot P(X)$ mit $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt

ii) $X^7 - 3X^6 + 2X^5 - 3X^3 + 10X^2 - 9X + 2 = (X^2 - 3X + 2) \cdot P(X)$

iii) $X^n - 1 = (X-1) \cdot P(X)$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

b) Rechne $Q, R \in \mathbb{F}_7[X]$ aus, so dass

$$F(X) := X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 2X + 1 \;=\; (X+6) \cdot Q \;+\; R\ .$$

Prüfe nach, dass $R = W_1(F) := F(1)$, dem Wert des Polynoms F an der Stelle $1 \in \mathbb{F}_7$, und erkläre diese Gleichheit.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.3 (Vollständige Induktion)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_1(n)$ die Summe aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, $S_2(n)$ die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, usw.
Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle n gelten:

$$S_1(n) \;:=\; \sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2(n) \;:=\; \sum_{m=1}^{n} m^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$S_3(n) \;:=\; \sum_{m=1}^{n} m^3 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2\ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 6.4 (Binomialkoeffizienten und Induktion)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ sind

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ , \tag{1}$$

die Binomialkoeffizienten.

Hierbei ist $n!$ induktiv durch $0! := 1$ und $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$ definiert.

Zeige, dass mit den Anfangswerten $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ die folgenden Rekursionsformeln gelten:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} \cdot k = \binom{n}{k-1} \cdot (n+1-k)$$

Gib nun umgekehrt mit jeder dieser Rekursionsformeln einen Induktionsbeweis für (1) an.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.5 („beste lineare Approximation")

Zeige, dass für Polynomfunktionen 3. Grades $Q(x) := b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ gilt:

Für alle $a, x \in [-R, R]$ (a und R Konstanten) erfüllt die Abweichung der Polynome $Q(x)$ von den linearen Funktionen $L_a(x) = Q(a) + Q'(a) \cdot (x-a)$, die bei $x = a$ denselben Wert und dieselbe Steigung wie Q haben, für eine geeignete Konstante $K > 0$ die Ungleichung

$$|Q(x) - L_a(x)| \leq K(x-a)^2\ .$$

Diese Ungleichung sagt uns wie gut die Polynome Q durch die Funktionen L_a approximiert werden.

Hinweis: Benutze (s. Vorlesung), dass für die Abweichung der einzelnen Potenzen von ihren Tangenten an der Stelle a gilt:

$$a, x \in [-R, R] \quad \Longrightarrow \quad |x^k - a^k - k a^{k-1}(x-a)| \leq \tfrac{1}{2} k(k-1) R^{k-2} (x-a)^2\ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 6.6 (Zyklische Gruppe)

Auf der Menge der Restklassen modulo q

$$\mathbb{Z}/q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{[n] = n + q\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

können wir eine Addition definieren durch $[m] + [n] = [m+n]$.

Zeige: Mit dieser Addition ist $\mathbb{Z}/q$ eine abelsche Gruppe mit q Elementen $[0], [1], \ldots, [q-1]$.

Diese Gruppe heißt *Zyklische Gruppe der Ordnung* q: Addieren wir zu einem beliebigen Element von $\mathbb{Z}/q$ das Element $[1]$, dazu wieder $[1]$ usw., dann durchlaufen wir nacheinander alle Elemente von $\mathbb{Z}/q$ bis wir nach q Schritten zum Ausgangspunkt zurückkehren.

(2 Punkte)