Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 5 (Aufgaben 5.1 - 5.6)

****

Abgabe: in den Übungen am 21/22.11.06

Die angegebenen Punktwerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.

Aufgabe 5.1 (K-Vektorräume)

Betrachte die Indexmenge $M = \{1, \ldots, n\}$ und einen Körper K. Zeige: die Produktmenge

$$V = K^n = \left\{ \begin{array}{rcl} v : M & \to & K \\ i & \mapsto & v_i \end{array} \right\}$$

mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation ist ein K-Vektorraum.

(3 Punkte)

Aufgabe 5.2 (Linear abhängig, linear unabhängig)

Betrachte die Polynome

$$P_1(x) := x - 1 \quad , \quad P_2(x) := x - 2 \quad , \quad P_3(x) := x - 3 \ .$$

Zeige, dass je zwei von diesen linear unabhängig, aber alle drei linear abhängig sind. (Koeffzienten in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$)

(3 Punkte)

Aufgabe 5.3 (Linear abhängig, linear unabhängig)

Sind die folgenden kubischen Polynome aus $\mathbb{Q}_3[X]$ linear abhängig?

$$P_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \quad , \quad P_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \quad , \quad P_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \ .$$

(Beantwortung mittels eines Gleichungssystems gilt als Notlösung).

Finde eine Linearkombination $Q(x) = \sum_{i=1}^{4} a_i P_i(x)$, die an den vier Stellen $x = 1, 2, 3, 4$ den Wert $\frac{315}{19}$ hat.

(3 Punkte)

Aufgabe 5.4 (Lineare Abhängigkeit)

Es sei $\mathbb{Q}_3[x]$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

a) Zeige, dass es keine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{Q}_3[x] &\rightarrow \mathbb{Q}_3[x] \\ P &\mapsto Q = F(P), \qquad \text{für } P, Q \in \mathbb{Q}_3[x] \end{aligned}$$

gibt, so dass

$$F(1) = x \quad , \quad F(x) = 1 \quad \text{und} \quad F(1+x) = x^2 \ .$$

b) Zeige, dass es auch keine lineare Abbildung $G : \mathbb{Q}_3[x] \rightarrow \mathbb{Q}_3[x]$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} G(x^3 + 2x^2 + 5x + 1) &= x^2 + 3x \\ G(2x^3 + 5x^2 + 7x + 2) &= x^3 \\ G(x^2 - 3x) &= x^3 - 2x^2 \ . \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.5 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear (warum oder warum nicht)?

a) $F_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto 3x$

b) $F_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto 3x + 2$

c) $F_3 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto x^2$

d) $F_4 : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x], \qquad P(x) \mapsto P(x) + x^2 + 3x$

e) $F_5 : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x], \qquad P(x) \mapsto (3x + 2)P(x)$

f) $F_6 : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x], \qquad P(x) \mapsto P(x + 1)$

(3 Punkte)

Aufgabe 5.6 (Lineare Abbildungen)

Sei $\mathbb{Q}_n[x]$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome mit Koeffzienten in $\mathbb{Q}$ von Grad kleiner oder gleich n.

a) Zeige, dass es für alle Polynome $P \in \mathbb{Q}_n[x]$ $(n > 2)$ ein eindeutig bestimmtes Polynom $Q \in \mathbb{Q}_2[x]$ gibt, so dass gilt

$$P(0) = Q(0) \quad , \quad P(1) = Q(1) \quad , \quad P(2) = Q(2) \ .$$

b) Zeige, dass die durch $P \mapsto Q$ definierte Abbildung von $\mathbb{Q}_n[x]$ nach $\mathbb{Q}_2[x]$ linear ist.

(4 Punkte)