Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

# Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
# WS 06/07 Blatt 4 (Aufgaben 4.1 - 4.4)

**********************************************

Abgabe: in den Übungen am 14/15.11.06

*Die angegebenen Punktwerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.*

**Aufgabe 4.1 (Tangenten)**

Betrachte den Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ für $x > 0$. Bestimme die Tangente an der Stelle $x = a$ durch Betrachtung der Sehnensteigung um den Punkt $x = a$. Zeige, dass der Graph von $f(x)$ oberhalb dieser Tangente liegt. Zeige, dass für $x \in [\frac{a}{2}, 2a]$ die Abweichung der Tangente vom Graph der Funktion für eine gewisse Konstante $K$ die Ungleichung $K \cdot (x-a)^2 \geq 0$ erfüllt. Bestimme die Konstante $K$. (5 Punkte)

**Aufgabe 4.2 (Axiomatischer Umgang mit Ungleichungen)**

Ziel der Aufgabe ist, die Rechenregeln für Ungleichungen mit *rationalen Zahlen* auf die Rechenregeln für Ungleichungen mit *ganzen Zahlen* zurückzuführen. Dazu müssen wir zuerst definieren, wann eine rationale Zahl positiv ist.

DEFINITION: Wir sagen, dass die rationale Zahl $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ positiv ist, wenn gilt: $0 < a \cdot b$.

Setze die folgende Behauptung für *ganzen Zahlen* voraus und zeige damit:

**a)** Wenn $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ positive rationale Zahlen sind, so auch $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ sowie $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ .

Als nächstes müssen wir definieren, wann eine rationale Zahl größer ist als eine andere.

DEFINITION: Für $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ sagen wir $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ wenn gilt: $0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ .

Nun setze voraus, dass a) bewiesen ist und zeige für $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ :

**b)** $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} < \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$ sowie $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ ,

und falls zusätzlich noch $0 < \frac{m}{n}$ gilt, so gilt auch $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} < \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$ .

*Bemerkung:* Da ganze Zahlen $a, b$ auch rationale Zahlen mit Nenner 1 sind, muß bei den beiden Definitionen überlegt werden, dass sie bei Anwendung auf rationale Zahlen mit Nenner 1 mit den als bekannt vorausgesetzten Eigenschaften der ganzen Zahlen übereinstimmen. Das ist nicht Teil der Aufgabenstellung.

(4 Punkte)

**Aufgabe 4.3 (Körperaxiome)**

Läßt sich mit den Zahlenpaaren $(a, b)$, $a, b \in \mathbb{Q}$, so rechnen, dass die Körperaxiome erfüllt sind?
Zeige, dass mit der Addition der "Komponenten", $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, eine kommutative Gruppe gegeben ist.
Versuche zunächst die Multiplication durch $(a, b) * (c, d) := (ac, bd)$ zu definieren.
Welches Körperaxiom ist dann nicht zu erfüllen?
Was ändert sich wenn $(a, b)$ als $(a+b\sqrt{2})$ umgedeutet wird? Zeige, dass dann einen Körper gegeben ist.

(5 Punkte)

**Aufgabe 4.4 (Rechnen mit Kongruenzen)**

Kongruenzklassen modulo 7 lassen sich addieren und multiplizieren. Sei $\mathbb{F}_7$ die Menge aller Kongruenzklassen modulo 7, repräsentiert durch $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Zeige mit Hilfe der Multiplikationstabelle von Aufgabe 2.4, dass $\mathbb{F}_7$ ein Körper ist.

b) Zeige möglichst einfach, dass $\mathbb{F}_4$ (die Menge der Kongruenzklassen modulo 4) kein Körper ist.

c) Sei ab jetzt $\mathbb{F}_7[x]$ die Menge aller Polynome mit Koeffzienten in $\mathbb{F}_7$. Man kann solche Polynome koeffzientenweise addieren, also

$$\begin{aligned} & (3x + 5) \bmod 7 + (4x^2 + 4x + 2) \bmod 7 \\ \equiv\ & 4x^2 \bmod 7 + ((3 + 4)x) \bmod 7 + (5 + 2) \bmod 7 \\ \equiv\ & 4x^2 \bmod 7 \ . \end{aligned}$$

Man kann auch mit einem Element von $\mathbb{F}_7$ multiplizieren, also

$$(4 \bmod 7) \cdot ((3x + 1) \bmod 7) \equiv (12x + 4) \bmod 7 \equiv (5x + 4) \bmod 7 \ .$$

Zeige, dass $\mathbb{F}_7[x]$ mit diesen Rechenregeln zu einem $\mathbb{F}_7$-Vektorraum wird. Schreibe den Beweis so auf, dass nur benutzt wird, dass $\mathbb{F}_7$ die Körperaxiome erfüllt.

d) Warum hat ein quadratisches Polynom $P \in \mathbb{F}_7[x]$ , $P \neq 0$ , höchstens zwei Nullstellen?

(6 Punkte)