

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 3 (Aufgaben 3.1 - 3.5)

Abgabe: in den Übungen am 6/7.11.06

Die angegebenen Punktwerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.

Aufgabe 3.1 (Ungleichung arithmetische und harmonische Mittel)

Das arithmetische Mittel a und das harmonische Mittel h von $x, y \in \mathbb{R}$ werden durch

$$a := \frac{1}{2}(x + y) \quad \text{und} \quad \frac{1}{h} := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

definiert. Bekanntlich gilt $0 \leq (x - y)^2$ für alle $x, y > 0$. Zeige unter Verwendung dieser Ungleichung:

Für alle $x, y > 0$ gilt $h \leq a$.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.2 (Rechnen mit Ungleichungen)

Zeige, daß die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ (also der Graph der Funktion $x \mapsto x^2$) keine gemeinsamen Punkte mit der Kreisscheibe vom Radius $6/7$ um $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

(3 Punkte)

Aufgabe 3.3 (Polynome und Ungleichungen)

a) Zeige, dass für alle $x, a \in \mathbb{Q}$ gilt: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

Bemerkung: Es handelt sich hier um eine Art *Binomische Formel*.

b) Beweise dann, dass für alle $0 \leq x, a$ gilt:

$$0 \leq x^3 - a^3 - 3a^2(x - a) .$$

c) Was bedeutet diese Ungleichung für den Graphen der beiden Funktionen

$$x \mapsto x^3 \quad \text{und} \quad x \mapsto a^3 + 3a^2(x - a) .$$

Hinweis: Der Graph von $x \mapsto a^3 + 3a^2(x - a)$ ist eine Gerade, die mit dem Graph von $x \mapsto x^3$ bei $x = a$ einen gemeinsamen Punkt besitzt.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.4 (Kreise und der Graph von $x \mapsto x^4$)

- a) Es sei (m, n) ein Punkt der (x, y) -Ebene und es sei $r > 0$, dann zeichne die Menge aller Punkte (x, y) mit

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 \leq r^2.$$

- b) Betrachte den Graphen von $x \mapsto x^4$. Bestimme den Kreis mit dem Mittelpunkt auf der y-Achse, der diesen Graph im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ berührt.
Stelle die Ungleichung auf, die beweisen würde, dass für $|x| \leq 1$ die Punkte des Funktionsgraphen *innerhalb* dieses Kreises liegen.
- c) Bestimme analog zu b) den Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse, der diesen Graph im Punkt $(2, 16)$ berührt.
- d) Läßt sich einen Kreis finden, der den Graph im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ berührt, bei dem der Graph dann aber *außerhalb* dieses Kreises verläuft?

(6 Punkte)

Aufgabe 3.5 (Gruppen)

Betrachte die Permutationen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$.

Bestimme die Multiplikationstabelle bezüglich der Komposition der Permutationen.

Zeige, daß die Menge alle Permutationen, zusammen mit der Komposition als Verknüpfung, eine nicht-kommutative Gruppe bildet.

(Diese Gruppe heißt die *Symmetrische Gruppe von drei Elementen*, S_3 .)

(4 Punkte)