

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 2 (Aufgaben 2.1 - 2.5)

Abgabe: in den Übungen am 30.10.06/ 1.11.06

Die angegebenen Punktwerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.

Aufgabe 2.1 (Approximation von Wurzeln mit rationalen Zahlen)

Betrachte den folgenden Algorithmus zur beliebig genauen Bestimmung von $\sqrt{3}$:

$$\text{Es sei } x_1 := 3 \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeige, dass für jedes n gilt:

$$\frac{3}{x_n} < \sqrt{3} < x_n.$$

b) Begründe, dass sich die Fehlerschranke $x_n - \frac{3}{x_n}$ in jedem Schritt mindestens halbiert.

c) Bestimme x_2, x_3, x_4 und rechne nach, dass bereits $x_4 - \frac{3}{x_4}$ kleiner als 10^{-3} ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2.2 (Beispiele zu “viel kleiner”)

Bestimme eine Zahl r , für die aus $0 < |x| \leq r$ stets

$$x^2 \text{ ist höchstens 3\% von } |x|$$

folgt. Wieviel Prozent von $|x|$ ist $|x|^3$ höchstens, und wieviel Prozent von $|x|^2$ ist $|x|^4$ höchstens (*unter derselben Voraussetzung* $0 < |x| \leq r$)?

Gib zu jeder Prozentzahl p eine Zahl $r(p)$ an, so dass aus $0 < |x| \leq r(p)$ folgt:

$$x^2 \text{ ist höchstens } p\% \text{ von } |x|.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2.3 (Körperaxiome)

a) Warum ist die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen kein Körper?

b) Warum ist die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen kein Körper?

Listen Sie jeweils auf, welche der Körperaxiome verletzt bzw. erfüllt sind. (4 Punkte)

Aufgabe 2.4 (Gleichungssysteme)

- a) Löse über \mathbb{Q} (also suche Lösungen in \mathbb{Q}) das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}3x + 3y &= 2 \\2x + 5y &= 3.\end{aligned}$$

- b) Bestimme die Multiplikationstafel für Rechnungen modulo 7.

Beispiel: $(4 \bmod 7) \cdot (5 \bmod 7) \equiv 20 \bmod 7 \equiv 6 \bmod 7$.

- c) Löse das folgende Kongruenzsystem, indem *dasselbe Verfahren* wie in a) mit der Multiplikationstabelle aus b) benutzt wird:

$$\begin{aligned}3x + 3y &\equiv 2 \pmod{7} \\2x + 5y &\equiv 3 \pmod{7}.\end{aligned}$$

- d) Warum ist das Kongruenzsystem

$$\begin{aligned}3x + 4y &\equiv 2 \pmod{7} \\2x + 5y &\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$

nicht lösbar?

(5 Punkte)

Aufgabe 2.5 (Logik)

Aus einem Zoologiebuch:

“Jede ungebrochelte Kalupe ist dorig und jede foherante Kalupe ist dorig. In Quasiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen”

Welche der nachstehenden Folgerungen über die Fauna von Quasiland sind zulässig?

- a) Es gibt sowohl gebrochelte wie ungebrochelte Kalupen.
- b) Es gibt gebrochelte Kalupen.
- c) Alle undorigen Kalupen sind gebrochelt.
- d) Einige gebrochelte Kalupen sind unfoherant.
- e) Alle gebrochelten Kalupen sind unfoherant.

(2 Punkte)