

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler

WS 06/07 Blatt 2 (Aufgaben 2.1 - 2.5)

Abgabe: in den Übungen am 30.10.06/ 1.11.06

Die angegebenen Punktewerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.

Aufgabe 2.1 (Approximation von Wurzeln mit rationalen Zahlen)

Betrachte den folgenden Algorithmus zur beliebig genauen Bestimmung von $\sqrt{3}$:

Es sei $x_1 := 3$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass für jedes n gilt:

$$\frac{3}{x_n} < \sqrt{3} < x_n .$$

b) Begründe, dass sich die Fehlerschranke $x_n - \frac{3}{x_n}$ in jedem Schritt mindestens halbiert.

c) Bestimme x_2, x_3, x_4 und rechne nach, dass bereits $x_4 - \frac{3}{x_4}$ kleiner als 10^{-3} ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2.2 (Beispiele zu “viel kleiner”)

Bestimme eine Zahl r , für die aus $0 < |x| \leq r$ stets

x^2 ist höchstens 3% von $|x|$

folgt. Wieviel Prozent von $|x|$ ist $|x|^3$ höchstens, und wieviel Prozent von $|x|^2$ ist $|x|^4$ höchstens (*unter derselben Voraussetzung* $0 < |x| \leq r$)?

Gib zu jeder Prozentzahl p eine Zahl $r(p)$ an, so dass aus $0 < |x| \leq r(p)$ folgt:

x^2 ist höchstens $p\%$ von $|x|$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.3 (Körperaxiome)

a) Warum ist die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen kein Körper?

b) Warum ist die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen kein Körper?

Listen Sie jeweils auf, welche der Körperaxiome verletzt bzw. erfüllt sind. (4 Punkte)

Aufgabe 2.4 (Gleichungssysteme)

- a) Löse über \mathbb{Q} (also suche Lösungen in \mathbb{Q}) das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 2 \\ 2x + 5y &= 3. \end{aligned}$$

- b) Betimme die Multiplikationstafel für Rechnungen modulo 7.

Beispiel: $(4 \bmod 7) \cdot (5 \bmod 7) \equiv 20 \bmod 7 \equiv 6 \bmod 7$.

- c) Löse das folgende Kongruenzsystem, indem *dasselbe Verfahren* wie in a) mit der Multiplikationstabelle aus b) benutzt wird:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &\equiv 2 \pmod{7} \\ 2x + 5y &\equiv 3 \pmod{7}. \end{aligned}$$

- d) Warum ist das Kongruenzsystem

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\equiv 2 \pmod{7} \\ 2x + 5y &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned}$$

nicht lösbar?

(5 Punkte)

Aufgabe 2.5 (Logik)

Aus einem Zoologiebuch:

“Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foberante Kalupe ist dorig. In Quasiland gibt es sowohl dorige wie undorige Kalupen”

Welche der nachstehenden Folgerungen über die Fauna von Quasiland sind zulässig?

- a) Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.
- b) Es gibt gebrochselte Kalupen.
- c) Alle undorigen Kalupen sind gebrochselt.
- d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.
- e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant.

(2 Punkte)