Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 15 (Aufgaben 15.1 - 15.4)

****

Aufgabe 15.1 (Additionstheorem und Eindeutigkeitssatz)

Bekanntlich löst die Sinusfunktion die Differentialgleichung

$$f'' + f = 0 \ . \tag{1}$$

Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion f eine Lösung von (1) ist, so nennen wir $f(0)$ und $f'(0)$ ihre Anfangswerte.

a) Zeige, dass für jede Lösung der Gleichung (1) auch folgendes gilt:
Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$E[f(t)] := f'(t)^2 + f(t)^2 = c \ .$$

(Diese Gleichung ist der Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}(f')^2$ entspricht der kinetischen und $\frac{1}{2}(f)^2$ der potentiellen Energie eines harmonischen Pendels.)

b) Seien g und h zwei Lösungen der Differentialgleichung (1).
Zeige mit Hilfe von a), dass g und h schon dann gleich sind, wenn ihre Anfangswerte übereinstimmen. (Betrachte die Differenz $d(t) := g(t) - h(t)$ und $E[d(t)]$, um zu zeigen, dass $d(t) = 0 \ \forall t$.)

c) Beweise mit Hilfe von b) die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\forall x, a \in \mathbb{R}: \qquad \sin(a+x) = \sin(a)\cos(x) + \cos(a)\sin(x) \tag{2}$$

$$\cos(a+x) = \cos(a)\cos(x) - \sin(a)\sin(x) \tag{3}$$

(Weise nach, dass beide Seiten von (2) die Gleichung (1) erfüllen und dieselben Anfangswerte haben; aus $g(x) = h(x)$ folgt dann auch $g'(x) = h'(x)$.)

d) Betrachte die Drehung um den Winkel α im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn):

$$\begin{array}{cccc} D_\alpha : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \end{pmatrix} . \end{array}$$

Zeige, dass D_α eine lineare Abbildung ist. Was ist die darstellende Matrix von D_α und von $D_\beta \circ D_\alpha$? Zeige unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme in c), dass $D_\beta \circ D_\alpha = D_{\beta+\alpha}$ gilt.
Damit haben wir eine geometrische Deutung der Additionstheoreme: Eine Drehung um die Summe zweier Winkel ist dasselbe wie die Hintereinanderausführung zweier einzelner Drehungen!

Aufgabe 15.2 (Exponentialfunktion)

a) In der Vorlesung haben wir die Reihen für die Exponentialfunktion, die Sinus- und die Cosinusfunktion behandelt. Schreibe sie auf und zeige damit für alle $x \in \mathbb{R}$ die ***Formel von Euler und de Moivre*** $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.

b) Aus a) und der Formel $\exp(x+a) = \exp(x) \cdot \exp(a)$ folgere

   i) die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus (s. Aufgabe 15.1).

   ii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und somit, dass $\exp(ix)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis $\{|z| = 1; z \in \mathbb{C}\}$ ist.

   iii) $\exp(ix + i2\pi) = \exp(ix)$.

c) *Polarkoordinatendarstellung.*
Zeige, dass sich jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig in der Form $z = r\exp(i\varphi)$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ darstellen läßt.

Aufgabe 15.3 (Kettenregel und Umkehrfunktionen)

a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ und $y \mapsto g(y)$ dreimal differenzierbar, und es gelte $g \circ f = \mathrm{id}_\mathbb{R}$, $f \circ g = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ (also, g(f(x)) = x , f(g(y))=y). Gib $(g'(y), g''(y), g'''(y))$ in Abhängigkeit von $(f'(x), f''(x), f'''(x))$ mit $x = g(y)$ an.

b) Seien $f(x) = x^4$ und $g(y) = \sqrt[4]{y}$.
Berechne g', g'' einerseits mit der Kettenregel, andererseits mit a).
(*Die Ableitung der Wurzelfunktion ist bekannt(!) und es ist* $\sqrt[4]{} = \sqrt{\sqrt{}}$.)

c) Sei $f = \cos$ und $a \in [\frac{1}{10}, 1]$. Gib das Taylorpolynom dritten Grades der Umkehrfunktion an der Stelle $A := \cos(a)$ an.

Aufgabe 15.4 (Umkehrfunktionen)

a) Bestimme jeweils den Wertebereich und die Umkehrfunktion von $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $g : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad , \quad g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 .$$

b) Begründe, dass die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ eine Umkehrfunktion ($\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) besitzt.
Finde die Ableitung: $\arcsin'(x)$ für $x \in (-1, 1)$.

c) In der Vorlesung haben wir gesehen:
exp wächst schneller als jede Potenz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} .$$

Nun beweise: die Logarithmusfunktion ln wächst schwächer als jede Potenz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0 \quad \text{für jedes } a > 0 .$$