Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 14 (Aufgaben 14.1 - 14.5)

****

Abgabe in den Übungen am 30./31.01.06

Aufgabe 14.1 (Gauß-Elimination)

a) Finde die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 9 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

b) Unter Benutzung des Gauß-Eliminationsverfahrens invertiere die Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\; B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\; C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\; D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4+\alpha & 10 \\ 5 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

Stelle dir das α aus D als Messfehler vor, und vermeide deshalb, durch α zu dividieren. Für welche α versagt das Verfahren? Berechne den Rang von D für solche α.

(6 Punkte)

Aufgabe 14.2 (Ein Taylorfeind)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$ gegeben.

a) Zeige mit Hilfe von $(0 \leq x \;\Rightarrow\; (1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x)$ die Ungleichungen

$$0 \leq f(x) \leq n^n x^{2n} \quad , \quad |f'(x)| \leq 2n^n \cdot |x|^{2n-3}.$$

b) Berechne f' und f'' für $x = 0$ (mit den Ungleichungen in a) für $n = 1$ bzw. $n = 3$ und der Differenzierbarkeitsdefinition).

c) Zeige, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ eine rationale Funktion $R_k(x) = P_k(x) \cdot x^{-3k}$ mit $P_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ gibt, für die $f^{(k)}(x) = R_k(x) \exp(-1/x^2)$ für alle $x \neq 0$ gilt. (Induktionsbeweis)

d) Zeige, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ Konstanten K_k gibt, so dass

$$\forall x \in [-1,1] \backslash \{0\} : \; |f^{(k)}(x)| \leq K_k \cdot x^2\;,$$

also $f^{(k+1)}(0) = 0$ nach der Differenzierbarkeitsdefinition. Wie sehen die Taylorpolynome an der Stelle x=0 aus? Haben sie überhaupt etwas mit der Funktion f zu tun?

(4 Punkte)

Aufgabe 14.3 (Komplexe Zahlen)

a) Zerlege

$$z := \left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4 \quad , \quad w := \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{i + \cfrac{1}{i+1}}}$$

in Real- und Imaginärteile. (Natürlich darf für Ausdrücke wie $(a-ib)^n$ die binomische Formel angewandt werden).

b) Bringe die folgenden als Produkt von Linearfaktoren gegebenen Polynome auf die Gestalt $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

i) $(x - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}))$

ii) $(x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iii) $(x + 1) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})) \cdot (x - \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))$

iv) $(x-\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}))\cdot(x-\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}))\cdot(x+1)\cdot(x-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}))\cdot(x-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}))$.

(3 Punkte)

Aufgabe 14.4 (Intervallschachtelung)

Betrachte die durch

$$a_1 := 2 \ , \quad b_1 := 4 \ , \quad a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \ , \quad b_{n+1} := \frac{2a_{n+1}b_n}{a_{n+1} + b_n} \ .$$

definierten Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$.
Zeige durch Induktion, dass durch $\{[a_n \, , \, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung gegeben ist.
Mit Rechnerhilfe berechne einige Intervalle, um daraus den Grenzwert zu erraten
($[a_{10}, b_{10}]$ ergibt eine Zahl, die bis auf die 4. Dezimalstelle richtig ist).

(4 Punkte)

Aufgabe 14.5 (Produktformeln fürs Differenzieren)

a) Seien f, g n-mal differenzierbare Funktionen. Zeige für $k \leq n$ die Formel

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x) \ .$$

(Hinweis: Induktion über k).

b) Zeige für $f_1, \ldots, f_n$ differenzierbar, dass

$$(f_1 \cdots f_n)'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \cdots f_{i-1}(x) f_i'(x) f_{i+1}(x) \cdots f_n(x) \ .$$

(3 Punkte)