Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 13 (Aufgaben 13.1 - 13.6)

****

Abgabe in den Übungen am 23./24.01.06

Aufgabe 13.1 (Konvergente Reihe und Teleskopsumme)

a) Die Folge der Partialsummen $s_n := \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert. Zeige, dass der Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

ist. (Hinweis: zerlege $\frac{1}{k(k+1)}$ in Partialbrüche um s_n als Teleskopsumme zu schreiben).

b) Auf ähnliche Weise berechne den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 13.2 (Geometrische Reihe)

a) Stelle den periodischen Dezimalbruch $2,312312312312312\ldots$ als rationale Zahl $\frac{p}{q}$ dar.

b) Welchen Wert hat die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$? (2 Punkte)

Aufgabe 13.3 (Komplexe Zahlen II)

In Aufgabe 12.4 wurde aus $\mathbb{Q}^2$ ein Körper gemacht. Wenn wir genau dasselbe mit $\mathbb{R}^2$ machen, bekommen wir einen anderen Körper, nämlich die ***Komplexen Zahlen***, bezeichnet mit $\mathbb{C}$. Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, dann definieren wir die zu z ***komplex konjugierte*** Zahl durch $\bar{z} := a - bi$ und die ***Norm*** von z durch $|z| := \sqrt{\bar{z}z}$.

a) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ $\mathbb{R}$–linear ist.

b) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. Folgere, dass $|zw| = |z|\,|w|$.

c) Zeige, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $|z + w| \leq |z| + |w|$
(Mache eine schöne Zeichnung dazu; Dreiecksungleichung!).

d) Geometrische Reihe: Sei $z \in \mathbb{C}$, zeige

$$(1 - z) \cdot \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1} \ ,$$

dass also die gleiche Formel wie für reelle Zahlen gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 13.4 (Rang von Matrizen)

Betrachte:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme jeweils den Rang der Matrizen A, B, AB und BA.

b) Was ist die Dimension der Lösungsräume der folgenden Gleichungen ($x \in \mathbb{Q}^3$):

$$Ax = 0 \quad , \quad Bx = 0 \quad , \quad ABx = 0 \quad , \quad BAx = 0 \text{ ?}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 13.5 (Lineare Unabhängigkeit und Dimensionsformel)

Sei V ein K-Vektorraum und $u, v \in V$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

a) $\dim(\mathrm{span}(\{u, v\}) = 2$

b) Es gibt eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathrm{span}(\{u, v\}) \to K^2$$

mit $\varphi(u) = (1, 0)$ und $\varphi(v) = (0, 1)$

c) Die Vektoren u, v sind linear unabhängig .

(Hinweis: Zeige a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a), so entfällt die Notwendigkeit z.B. c) $\Rightarrow$ a) zu beweisen).

(3 Punkte)

Aufgabe 13.6 (Folgen von Sehnensteigungen)

Sei $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei f eine auf (α, ω) differenzierbare Funktion und $a \in (\alpha, \omega)$.

Zeige zunächst: Es gibt eine Zahl $n_a \in \mathbb{N}$ so dass für $n \geq n_a$ gilt $a + r_n \in (\alpha, \omega)$.

Zeige für diese $n \geq n_a$, dass die Folge der Sehnensteigungen der Sehnen durch $(a, f(a))$ und $(a + r_n, f(a + r_n))$ gegen die Ableitung $f'(a)$ von f im Punkt a konvergiert, also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(a + r_n) - f(a)}{r_n} = f'(a) \ .$$

(4 Punkte)