Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 12 (Aufgaben 12.1 - 12.5)

****

Abgabe in den Übungen am 16./17.01.06

Aufgabe 12.1 (Darstellende Matrizen)

Betrachte die in Aufgabe 10.2 erhaltene Matrix $M(L)$, die die Differenziationsabbildung bezüglich der Basis $(1,\ X,\ X^2,\dots,X^k)$ darstellt.

a) Durch Matrixmultiplikation, finde für $k = 4$, die Matrizen: $M(L)^2, M(L)^3, M(L)^4$, $M(L)^5$. Prüfe nach, dass sie die Verkettungen $L\circ L$, $L\circ L\circ L$, $L\circ L\circ L\circ L$, $L\circ L\circ L\circ L\circ L$ darstellen.

Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (oder auch Zeilenvektoren!). Beachte, dass die Dimension der Kerne dieser Abbildungsmatrizen gleich $(k{+}1 - \mathrm{Rang(M)})$ ist.

b) Es läßt sich leicht eine Matrixdarstellung $M(L_k) \in \mathrm{Mat}(k{\times}k{+}1,\ \mathbb{Q})$ der Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} L_k := \mathrm{diff}: & \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k-1}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

bezüglich der gleichen Basis für $\mathbb{Q}_k[X]$ schreiben. Nun finde bezüglich dieser Basis die darstellende Matrix $M(N_k) \in \mathrm{Mat}(k{+}2{\times}k{+}1,\ \mathbb{Q})$ der linearen Abbildung: “multipliziere mit X”:

$$\begin{array}{rrcl} N_k: & \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{k+1}[X] \\ & P(X) & \longmapsto & X\cdot P(X)\ . \end{array}$$

c) Multipliziere: $M(N_2){\cdot}M(L_3)$ und $M(L_4){\cdot}M(N_3)$. Interpretiere die Gleichung

$$M(L_4){\cdot}M(N_3) - M(N_2){\cdot}M(L_3) = \mathbb{I}_4$$

für die zugehörigen Abbildungsverkettungen.

(5 Punkte)

Aufgabe 12.2 (Binomische Formeln)

Es seien $A, B, \mathbb{I} \in \mathrm{Mat}(n\times n\,,\ K)$, wobei $\mathbb{I}$ die Einheitsmatrix ist.

a) Berechne: $(A{+}B)^3$, $(\mathbb{I}{+}B)^3$. (Klammern auflösen und dabei beachten, dass im allgemeinen $AB \neq BA$.)

b) Zeige, dass für alle $k > 0$ und **kommutierende** Matrizen A, B mit $A^0 := \mathbb{I}$ die folgenden Formeln gelten:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \qquad\qquad A^k - B^K = (A-B)\cdot\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}B^j$$

(Vergleiche Aufgaben 7.5 und 9.6)

c) Berechne C^5 mit Hilfe von b) für $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 12.3 (Die Wurzelfunktion)

a) Betrachte für $x > 0$ und $j = 1, 2, 3, \ldots$ die folgenden rekursiv definierten Funktionenfolgen:

$$f_j := \frac{x}{g_j(x)}, \qquad g_{j+1}(x) := \frac{g_j(x) + f_j(x)}{2}, \qquad g_1(x) := \frac{1+x}{2}$$

(Also, $f_1(x) = \frac{2x}{1+x}$, $g_2(x) = \frac{4x+(1+x)^2}{4(1+x)}$, $\ldots$)
Zeige, dass für jedes feste $x > 0$ durch $\{[f_k(x)\,,\, g_k(x)]\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung gegeben ist.

b) Zeige, dass $f_k(x)^2 \leq x \leq g_k(x)^2$ für alle k und $x > 0$ gilt, also eine Intervallschachtelung für die Wurzelfunktion gegeben ist.

(Vergleiche die Diskussion zur $\sqrt{2}$ zu Beginn des Semesters.) (5 Punkte)

Aufgabe 12.4 (Komplexe Zahlen)

Wir haben schon gesehen wie aus $\mathbb{Q}^2$ ein Körper wird, in dem $P(x) = x^2 - 2$ zwei Nullstellen hat (Aufgabe 4.3). Wichtiger ist, den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ so zu einen Körper K zu machen, dass auch $Q(x) = x^2 + 1$ zwei Nullstellen hat:
Da wir die Addition in $\mathbb{Q}^2$ schon haben, muß nur noch die Multiplikation definiert werden. Dazu soll das Element $(1, 0) \in \mathbb{Q}^2$ als neutrales Element 1_K bezeichnet werden, und als Multiplikation mit den Elementen $(q, 0) = q \cdot 1_K$ soll die Skalarmultiplikation in $\mathbb{Q}^2$ weiterverwendet werden, also $(q, 0) \cdot (u, v) := (q \cdot u\ ,\ q \cdot v)$.
Damit sind die Vektorraumeigenschaften ausgenutzt, und es fehlt nur noch die Definition von $(0, 1) \cdot (0, 1)$. Dies soll Nullstelle von $Q(x) = x^2 + 1$ werden. Wir definieren daher:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) := (-1, 0) = -1_K\,, \qquad \text{kurz: } i := (0, 1)$$

Oder ausführlicher: $(a \cdot 1_K + b \cdot i) \cdot (c \cdot 1_K + d \cdot i) = (ac - bd) \cdot 1_K + (ad + bc) \cdot i\,.$

Zeige die Gültigkeit aller auf die Multiplikation bezogenen Körperaxiome, nämlich:

a) 1_K ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.

b) Die Multiplikation ist kommutativ sowie assoziativ.

c) Das Distributivgesetz gilt.

d) $\frac{a}{a^2+b^2} \cdot 1_K - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$ ist multiplikatives Inverses von $(a, b) = a \cdot 1_K + b \cdot i\,.$

(3 Punkte)

Aufgabe 12.5 (Taylorapproximation)

Finde das Taylorpolynom 2. Grades bei $x = 0$ der Fermi-Energieverteilungsfunktion:

$$f(x) := \frac{1}{\exp(x) + 1} \quad , \quad x \geq 0\,.$$

Wie groß ist die prozentuale Abweichung des Taylorpolynoms von der exakten Funktion bei $x{=}1$?

(2 Punkte)