Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 11 (Probeklausur vom 22.12.2006)

****

Sie haben 45 Minuten. Es gibt für jede vollständig richtig bearbeitete Aufgabe einen Punkt; keine Teilpunkte.

1) Bernouillische Ungleichung

Zeige durch Induktion:

$$x \in \mathbb{R}\ ,\ x > -1\ ,\ n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad (1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

2) Konvergenz

Definiere: *Konvergenz einer Folge von Zahlen in* $\mathbb{R}$.

Entscheide, ob die folgende Folge rationaler Zahlen konvergiert und bestimme gegebenfalls den Grenzwert:

$$\left\{ \frac{n^2 + 7n + 2}{3n^2 + 8n + 7} \right\} \quad , \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

3) Linearkombinationen

a) Bestimme den Spann und dessen Dimension in $\mathbb{Q}^4$ der Spaltenvektoren folgender Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

b) Betrachte den Vektorraum $(V, +, \cdot) = (\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$. Seien $v_0, v_1, v_2, v_3 \in V$ die folgenden Abbildungen

$$v_0 : x \mapsto 1\ ,\ v_1 : x \mapsto x\ ,\ v_2 : x \mapsto x^2\ ,\ v_3 : x \mapsto x^3\ .$$

Was ist $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_0, v_1, v_2, v_3)$? Bilden die Vektoren v_0, v_1, v_2, v_3 eine Basis dieses Spanns? Warum?

4) Tangentenapproximation

Betrachte die Funktion $f(x) := x^{1/3}$.

a) Was ist die Gleichung für die Tangente $l_a(x)$, die den Graph von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ berührt?

b) Mit $a = 1000$ berechne die Tangentenapproximation für $\sqrt[3]{1003}$.

5) Polynome

Betrachte

$$P(X) := X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 10X + 3\ .$$

Was ist die Vielfachheit der Nullstelle $X{=}1$?

6) Lineare (Un)Abhängigkeit

Sind die folgende Polynome aus $\mathbb{Q}_3[X]$ linear abhängig?

$$\{X \cdot (X-1) \cdot (X-2)\ , \quad X \cdot (X-1) \cdot (X-3)\ , \quad X \cdot (X-1) \cdot (X-4)\}\ .$$

7) Darstellende Matrix

Finde die darstellende Matrix für die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rrcl} L := (\text{diff}) : & \mathbb{Q}_2[X] & \to & \mathbb{Q}_2[X] \\ & P(x) & \mapsto & P'(x) \end{array}$$

bezüglich der Basis $(1,\ x,\ x^2)$ von $\mathbb{Q}_2[X]$.

8) Monotonie

Zeige mit Hilfe der Wachstumsrate h'/h :

$$h_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}\right)^n \quad \text{für} \quad x \geq 0 \quad \text{ist monoton wachsend in } n\,.$$