Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik I für Physiker und Geowissenschaftler
WS 06/07 Blatt 10 (Aufgaben 10.1 - 10.8)

****

Abgabe in den Übungen am 9./10.01.06

Die angegebenen Punktwerte werden nur für vollständig richtig bearbeitete Aufgaben gegeben.

Aufgabe 10.1 (Nicht alle Funktionen sind rational)

Zeige, dass es *keine* rationalen Funktionen $f(x) = P(x)/Q(x)$, $g(x) = R(x)/S(x)$ (außer $f = 0$ oder $g = 0$) gibt, so dass gilt: $f''(x) = -f(x)$ bzw. $g'(x) = g(x)$.
Tip: Die Grade der beteiligten Polynome vergleichen. (2 Punkte)

Aufgabe 10.2 (Lineare Abbildungen und darstellende Matrizen)

Betrachte den Polynomvektorraum $\mathbb{Q}_k[X]$. Sei

$$L := \text{diff} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_k[X] & \longrightarrow & \mathbb{Q}_k[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$$

die lineare Abbildung: “ableiten”.

a) Was sind die Kerne und die Bilduntervektorräume (einfacher: Bilder) von L, $L^2 {:=} L \circ L$, L^k, L^{k+1} ?

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich lineare Abbildungen $L : V \to W$ für beliebige (endlichdimensionale) Vektorräume durch Matrizen beschreiben lassen.

Für $V = W = \mathbb{Q}_k[X]$ finde die darstellenden Matrizen der Differentiationsabbildung $L := \text{diff}$ bezüglich der Basen

$$i) \quad \left(1,\ X,\ X^2, \ldots, X^k\right) \qquad ii) \quad \left(1\ ,\ 1+X\ ,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2\ ,\ \ldots\ ,\ \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} X^i\right) .$$

(5 Punkte)

Aufgabe 10.3 (Geometrische Reihe und Archimedes Axiom)

a) Benutze die Summenformel der geometrischen Reihe (s. Aufgabe 7.4), um für alle $0 \le x < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $(n+1)x^n \le 1/(1-x)$ zu beweisen. Verbessere diese zu:

$$x^n \le \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2(n+1)^2} .$$

b) Zeige mit a), dass es für jedes q , $0 < q < 1$, eine Konstante $K_q > 0$ gibt, so dass für alle $x \in [-q, q]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| \le \frac{K_q}{n} .$$

Bestimme K_q (natürlich unabhängig von x, n).

Ist $\{a_n\}$ mit $a_n := \dfrac{1}{1-q} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ und $q \in (-1, 1)$ eine Nullfolge? (4 Punkte)

Aufgabe 10.4 (Taylorapproximation)

a) Es sei $a \in \mathbb{Q}$ fest vorgegeben. Ferner seien $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$.
Zeige, dass es *genau ein* Polynom $Q(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit

$$Q(a) = c_0 \quad , \quad Q'(a) = c_1 \quad , \ldots , \quad Q^{(n)}(a) = c_n \ .$$

Es folgt, dass für jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ und jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein eindeutiges Polynom $t_{n,a}(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit

$$t_{n,a}(a) = P(a) \ , \quad t'_{n,a}(a) = P'(a) \quad , \ldots , \quad t^{(n)}_{n,a}(a) = P^{(n)}(a) \ .$$

Das Polynom $t_{n,a}(X)$ ist das *Taylorpolynom zu P vom Grad n bei x=a.*
Speziell ist die Tangente das Taylorpolynom $t_{1,a}(X)$ vom Grad 1.

b) Zeige, dass die beiden Polynome $t_{n,a}(X)$ und $P(X)$ (vgl. Aufgabe 9.7) bezüglich der Basis $\{(X-a)^j \ , j = 0, \ldots, n\}$ die gleichen Koeffizienten haben.

c) Zeige, dass es Konstanten $K, c \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass für alle $x \in (a-c \, , \, a+c)$ gilt

$$|P(x) - t_{k,a}(x)| \leq K|x-a|^{k+1}$$

Hinweis: Für $k \geq n$ ist nichts zu zeigen, für $k < n$ faktorisiere $|x-a|^{k+1}$ heraus und benutze die Dreiecksungleichung.

(4 Punkte)

Aufgabe 10.5 (Konvergenz)

a) Welche der folgenden Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind Nullfolgen?

a) $a_n := \frac{1}{2n}$ b) $a_n := n^2$
c) $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$ d) $a_n := \frac{1}{10} + \frac{1}{n}$
e) $a_n := (-1)^n$ f) $a_n := P(\frac{1}{n}) - 1$ mit $P(x) := 1 + x^2 + 2x^3$.

b) Benutze die Definition von Konvergenz einer Folge, um zu zeigen, dass

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{6n^2+1} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+1)}{2n+5} = \frac{3}{2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+3}} = 0$.

(5 Punkte)

Freiwillige Weihnachtsaufgaben (20 Bonuspunkte)

Aufgabe 10.6 (Matrixmultiplikation)

Sei

$$M_2(\mathbb{R}) := \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller 2-mal-2 Matrizen mit Koeffizienten (Komponenten) in $\mathbb{R}$. Ferner sei Matrixmultiplikation $*$ definiert durch

$$\begin{aligned} *\colon M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

a) Zeige, dass die Verknüpfung $*$ assoziativ aber nicht kommutativ ist.

b) Zeige, dass die Matrix $\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung $*$ ist.
Wir nennen eine Matrix $B \in M_2(\mathbb{R})$ die inverse Matrix zu A, falls die Matrix-Gleichungen $A{*}B = B{*}A = \mathrm{Id}$ erfüllt sind. (Wir schreiben dann $B = A^{-1}$).
Zeige, dass die Matrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ keine Inverse hat.

c) Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ gegeben, so dass $ad - bc \neq 0$. Finde $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, so dass die Matrix-Gleichung $A{*}B = \mathrm{Id}$ erfüllt wird. Zeige, dass dann $B{*}A = \mathrm{Id}$ auch erfüllt ist. $B = A^{-1}$ ist also die inverse Matrix zu A.
Hinweis: Es sind 4 algebraische Gleichungen für die 4 Unbekannten e, f, g, h zu lösen.

d) Definiere die *Determinante* einer Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ durch

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc .$$

Zeige, dass die Spaltenvektoren (oder Zeilenvektoren) von A linear abhängig sind, falls $\det(A) = 0$. Zeige, dass für alle $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ gilt: $\det(A{*}B) = \det(A)\det(B)$.

(7 Punkte)

Aufgabe 10.7 (Fibonacci Zahlen und Goldener Schnitt)

Fibonacci (1170–1250) hat die Zahlenfolge eingeführt, die rekursiv durch

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1, \qquad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{für } n > 1$$

definiert ist, und zwar um das Wachstum einer Kaninchenbevölkerung zu beschreiben.

a) Zeige induktiv, dass die Ungleichungen $a_n \le a_{n+1} \le 2a_n$ gelten.

b) Mit der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ betrachte die Folge $\{B_n\} := \{A^n\}$. Es bezeichne $(B_n)_{ij}$ das ij–te Matrixelement von B_n. Zeige durch Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n = (B_n)_{11}$.

c) Betrachte die Folge $\{c_n\}$ der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen ($c_n := a_{n+1}/a_n$). Übersetze die Rekursionsgleichung der a_n in eine Rekursionsgleichung für die c_n. Nehme zunächst an, dass die Folge $\{c_n\}$ konvergiert.
Benutze nun die erhaltene Rekursionsformel, um zu zeigen, dass deren Grenzwert $\alpha = (\sqrt{5}+1)/2$ ist. Die Zahl α heißt der *Goldene Schnitt* und erscheint auch in zahlreichen anderen Zusammenhängen.

d) Nun zeige, dass die Folge $\{c_n\}$ konvergiert.
Hinweis: Zeige dazu erst mit der in c) erhaltenen Rekursionsformel und der Gleichung $(\sqrt{5}-1)/2 = 2/(\sqrt{5}+1)$, dass

$$\left|c_{n+1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = \left|\frac{1}{c_n} - \frac{2}{\sqrt{5}+1}\right| < \frac{2}{3}\left|c_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| .$$

(8 Punkte)

Aufgabe 10.8 (Multiplikation nicht immer assoziativ) (korrigiert: 14.1.07)

Zeige, dass die Menge $\mathbb{H} := \{\pm 1, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ mit Multiplikation $*\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
1*1 &= 1 \quad , \quad (-1)*(-1) \;=\; 1 \quad , \quad 1*(-1) = (-1)*1 \;=\; (-1) \\
e_i * e_i &= -1 \quad , \quad 1*e_i \;=\; e_i*1 \;=\; e_i \quad , \quad -e_i \;=\; (-1)*e_i \;=\; e_i*(-1) \quad , \quad i=1,2,3 \\
e_1*e_2 &= -e_2*e_1 \;=\; e_3 \\
e_2*e_3 &= -e_3*e_2 \;=\; e_1 \\
e_3*e_1 &= -e_1*e_3 \;=\; e_2
\end{aligned}$$

eine Gruppe bildet, unter der Annahme, dass Multiplikation mit ± 1 assoziativ ist. (Hinweis: die Multiplikationsregeln sind symmetrisch unter zyklischen Permutationen der Indizes 1,2,3; es gilt nämlich

$$e_1 * e_2 \;=\; -e_2*e_1 \;=\; e_3 \quad \text{und alle zyklische Permutationen von} \quad (1,2,3) \; .$$

So muß die Assoziativität von nur wenigen Tripeln (e_i, e_j, e_k) nachgeprüft werden).

Nun zeige, dass die erweiterte Menge $\mathbb{O} := \{\pm 1\,, \pm e_1\,, \pm e_2\,, \pm e_3\,, \pm e_4\,, \pm e_5\,, \pm e_6\,, \pm e_7\}$ mit folgender Multiplikationstabelle *keine* Gruppe bildet:

	1	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
-1	-1	1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	$-e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$
e_1	e_1	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_3	e_3	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_4	e_4	$-e_4$	$-e_5$	e_6	e_7	-1	e_1	$-e_2$	$-e_3$
e_5	e_5	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$
e_6	e_6	$-e_6$	e_7	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_7$	$-e_6$	$-e_5$	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	-1

Nehme wieder an, dass Multiplikation mit ± 1 assoziativ ist.
Für das Versagen der Assoziativität reicht es zu zeigen, dass es *ein* Tripel gibt, für welches $e_i * (e_j * e_k) \neq (e_i * e_j) * e_k$.

(7 Punkte)