Teil V.

Vektor- und Untervektorräume

13. Mengen und Abbildungen

Seien A, B Mengen, dann ist A eine **Teilmenge** von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist. Also $A \subset B \Leftrightarrow B \supset A \Leftrightarrow \forall a \in A$ gilt $a \in B$.

$A \subsetneq B$: A ist eine **echte** Teilmenge von B.

Schnittmenge (Durchschnitt): $A \cap B := \{a \,|\, a \in A$ **und** $a \in B\}$, ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

Vereinigung: $A \cup B := \{a \,|\, a \in A$ **oder**[1] $a \in B\}$, ist die Menge aller Elemente, die in A oder B enthalten sind.

Bem: $A \cap B \subset A \cup B$

Mengendifferenz: $A - B = A \setminus B := \{a \,|\, a \in A,\ a \notin B\}$, ist die Menge aller Elemente von A, die nicht Elemente von B sind.

Definition 13.1. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $A' \subset A$ eine Teilmenge, dann heißt die Menge $f(A') := \{f(a) \in B \,|\, a \in A'\}$ das **Bild** von A' unter f.*

*Zu einer Teilmenge $B' \subset B$ heißt die Menge $f^{-1}(B') := \{a \in A \,|\, f(a) \in B'\}$ das **Urbild** von B' unter f.*

Beispiel 13.1: Sei $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2\,;\ B := \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

Sei ferner $A' \subset A,\ A' := \{(0,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}\,;\quad B' \subset B,\ B' := \{0\}$
Was ist das Bild von A' unter f?

$f(A') = \big\{f(0,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{0 + y \,|\, y \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}$

Urbild von B' unter f:
$f^{-1}(B') = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x,y) = 0\big\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\big\}$

[1] „oder“ $\neq$ „entweder … oder“

Wir betrachten die lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$; V, W sind K-VR, d.h. $L \in Hom(V, W)$
Jetzt betrachten wir die Teilmenge $U := L^{-1}(0) = \{v \in V \mid L(v) = 0 \in W\}$

- $v_1, v_2 \in U$, d.h. $L(v_1) = 0 = L(v_2)$
  $L(v_1 + v_2) \underbrace{=}_{L \text{ additiv}} L(v_1) + L(v_2) = 0$, d.h. $v_1 + v_2 \in U$
- $k \in K,\ v \in U \Leftrightarrow L(v) = 0$
  $L(k \cdot v) \underbrace{=}_{\substack{L \text{ ist} \\ \text{homogen}}} k \cdot L(v) = 0$, also $k \cdot v \in U$

Damit ist die Teilmenge $U \subset V$ ein in V enthaltener VR, ein „Untervektorraum“.

Definition 13.2. *$U = L^{-1}(0)$ heißt **Kern** der Abbildung L.*
$Ker\, L := L^{-1}(0) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$

Definition 13.3. *Sei $(V, +, \cdot\,)$ ein K-VR. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt **Untervektorraum** (kurz: UVR), falls sie folgenden Axiomen genügt:*

UVR 1: $0 \in U$.

UVR 2: $\forall\, u_1, u_2 \in U$ *gilt:* $u_1 + u_2 \in U$ *(Das heißt, daß U unter der Addition von V abgeschlossen ist.)*

UVR 3: $\forall\, \alpha \in K,\ \forall\, u \in U$ *gilt:* $\alpha \cdot u \in U$ *(Das heißt, daß U unter der skalaren Multiplikation von V abgeschlossen ist.)*

Also sei $u_1 + u_2 \in U;\ \alpha \in K$. Falls $u_1 + u_2 \in U$ und $\alpha \cdot u_1 \in U$ gilt, dann ist U bereits ein UVR von V.

Der UVR $U \subset V$ hat die Verknüpfungen von V ererbt. Damit ist U selbst ein K-VR.

Jeder UVR ist für sich betrachtet selbst ein VR, wenn man die Verknüpfungen des „Mutter“-Vektorraums als Verknüpfung des UVR definiert.

Beispiel 13.2: Sei K ein beliebiger Körper, $M \neq \varnothing$ eine Menge. $(V, +, \cdot\,) = (Abb(M, K), +, \cdot)$; Sei $M' \subset M$ eine Teilmenge, dann ist

$$U := \{f : M \rightarrow K \mid f(m) = 0,\ \forall\, m \in M'\}$$

ein UVR. Erfüllt dieser die Untervektorraumaxiome?

UVR 1: Die Abbildung $f : M \rightarrow K,\ f(m) := 0,\ \forall\, m \in M$ ist offensichtlich ein Element von U (Nullabbildung $0 \in U$), also ist $U \neq \varnothing$

UVR 2: Seien $f, g \in U$. $\forall\, m \in M' : \big(f + g\big)(m) \underbrace{:=}_{\text{nach Def.}} f(m) + g(m) = 0 + 0 = 0$, somit ist $(f + g) \in U$.

UVR 3: Seien $\alpha \in K,\ f \in U$. Nach der Definition von $\alpha \cdot f$ gilt $\forall\, m \in M'$:
$\big(\alpha \cdot f(m)\big)(m) := \alpha \cdot f(m) = \alpha \cdot 0 = 0$. Also ist $\alpha \cdot f \in U$.

Beispiel 13.3: $M = \{1, \dots, n\}$; $Abb(M, K) = K^n$; $M' = \{k+1, \dots, n\}$;
$(V, +, \cdot\,) = (K^n, +, \cdot)$

Dann ist $U := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_i \in K \right\}$ ein UVR.

Die drei Axiome UVR 1 - UVR 2 sind offensichtlich erfüllt.

Beispiel 13.4: Lösungsmenge von Gleichungen.

$a, b, c \in K$ seien vorgegebene Skalare. Die Gleichung $ax + by = c$ heißt **linear** in den Unbekannten x und y, weil keine Terme höherer Ordnung in x und y enthalten sind.

Die Gleichung heißt für $\begin{cases} c = 0 & \textbf{homogen} \\ c \neq 0 & \textbf{inhomogen.} \end{cases}$

Wir rechnen schnell nach: Die Lösungsmenge $U := \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \,|\, ax + by = c\}$ ist genau dann UVR des $\mathbb{K}^2$, wenn $c = 0$ (d. h. homogen). Falls $(a, b) \neq (0, 0)$ ist die Gleichung eine **Geradengleichung**, dann ist U ein echter UVR von $\mathbb{K}^2$.

$(x, y) = (-b, a)$ ist eine Lösung und jede andere Lösung ist ein skalares Vielfaches dessen.

Beispiel 13.5: $K = M = \mathbb{Q}$ $\qquad V = Abb(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$

1. $\left\{ \begin{array}{rccc} P: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & P(x) \end{array} \right\}$ sind ein UVR von V.
2. $\big\{$Polynome vom Grad $\leq k \leq n \in \mathbb{N}\big\}$ sind ein UVR von V.
3. $W := \big\{P \,|\, \text{Polynome vom Grad} = k \in \mathbb{N} - \{0\}\big\}$ sind kein UVR, denn zu $P \in W$ ist $0 \cdot P = 0 \notin W$; UVR 3 ist nicht erfüllt.
4. $(V, +, \cdot\,)$ sei ein beliebiger K-VR.
   Die Extremfälle sind:
   a) $U := \{0\}$ der **triviale UVR**

b) $U := \{V\}$

Bemerkung

1. Jeder UVR eines UVR von V ist selbst ein UVR von V.
2. $(V, +, \cdot)$ sei ein K-VR; $U_1, U_2 \subset V$ seien Untervektorräume, dann ist auch $U_1 \cap U_2 \subset V$ ein UVR.

Beweis

UVR 1: $0 \in U_1,\ 0 \in U_2$, folglich ist $0 \in U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ □

UVR 2: Ist für alle Elemente von U_1 und für alle Elemente von U_2 erfüllt, also insbesondere auch für Elemente von $U_1 \cap U_2$[2]. □

Bemerkung Dagegen ist $U_1 \cup U_2 \subset V$ **kein** UVR, da er beispielweise 0 nicht enthält.

Beispiel 13.6: $M = \{1, 2\},\ K \in \mathbb{R},\ (V, +, \cdot) = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$
$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R} \right\},\ U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$U_1 \cup U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 = 0 \vee x_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ ist **kein** UVR, denn zu $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$.

Wir hatten bereits: Für den K-VR $v_1, \ldots, v_m \in V,\ (V, +, \cdot)$ ist $span_K(v_1, \ldots, v_m) := \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}$ der von den Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ aufgespannte Raum. (Wird auch die **lineare Hülle** der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ genannt.)

Definition 13.4. *Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-VR und $M \subset V,\ M \neq \varnothing$, dann heißt $span_K(M) := \{U = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \mid \alpha_i \in K,\ v_i \in M\}$ der von M* ***aufgespannte Raum****.*

Satz 13.5. *Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-VR, $v_1, \ldots, v_m \in V$ und $M \subset V,\ M \neq \varnothing$, dann gilt:*

1. *$span_K(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein UVR.*
2. *$span_K(M)$ ist ein UVR.*
3. *Ist $U \subset V$ ein UVR und $M \subset U$, so ist $span_K(M) \subset U$, d. h. $span_K(M)$ ist der kleinste UVR von V, der M enthält.*

[2] niemals leer: UVR enhält immer den Nullvektor

Beweis

1. **UVR 1:** $0 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_m \in span_K(v_1, \ldots v_m)$ zu $x, y \in span_K(v_1, \ldots, v_m)$

   UVR 2: $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m; \quad y = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$
   $x + y = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$
   $= (\alpha_1 + \alpha_2) v_1 + \cdots + (\alpha_m + \beta_m) v_m \in span_k(v_1, \ldots v_m)$

   UVR 3: Analog für $r \in K$
   $r \cdot (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m) = r \cdot (\alpha_1 v_1) + \cdots + r \cdot (\alpha_m v_m)$
   $= (r \cdot \alpha_1) v_1 + \cdots + (r \cdot \alpha_m) v_m \in span_K(v_1, \ldots, v_m)$

2. Beweis für beliebige Mengen $M \subset V$:

   UVR 1: $0 \in span_K(M)$

   UVR 2: $x, y \in span_K(M); \quad x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m; \quad y = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n v_n$
   $x + y = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$

   UVR 3: Mit $r \in K$ und $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$:
   $r \cdot x = (r \cdot \alpha_1) v_1 + \cdots + (r \cdot \alpha_m) v_m \in span_K(M)$

3. Ist $M \subset U$ und U ein UVR, so liegen nach UVR 2 und UVR 3 auch alle Linearkombinationen von Elementen aus M in U. □

14. Lineare (Un-)Abhängigkeit

Eine Menge $M \subset V$ heißt **linear unabhängig**, falls für jede endliche Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset M$ mit paarweise verschiedenen v_j das m-Tupel $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig ist.

Eine Menge $M \subset V$ heißt **linear abhängig**, falls sie nicht linear unabhängig ist, d. h. falls sie eine endliche Menge $\{v_1, \ldots v_m\} \subset M$ aus paarweise verschiedenen v_j enthält, für die $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig sind.

Bemerkung Jedes n-Tupel, in dem ein Vektor mehrfach vorkommt, ist linear abhängig. Ist beispielsweise $v_1 = v_2$, so ist eine nichttriviale Linearkombination der Null gegeben durch: $1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0$

Definition 14.1. *Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-VR und $v_1, \ldots, v_m \in V$. Falls $span_K(v_1, \ldots, v_n) = V$, so nennen wir $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein **Erzeugendensystem** des Vektorraumes V.*

Definition 14.2. *Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-VR und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Falls gilt, daß*

1. *die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig sind und*
2. *$span_K(v_1, \ldots, v_n) = V$,*

*so heißen die Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine **Basis** von V. Eine Basis ist somit ein linear unabhängiges (minimales) Erzeugendensystem eines Vektorraumes.*

15. Polynome und Polynomfunktionen

Polynome $P(X) \in K[X]$
$P(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \qquad a_i \in K;\ X$ ist ein Symbol.

V :K-VR; $\quad L_1,\, L_2 \in Hom(V, V)$

Die Komposition $L_1 \circ L_2$ zweier linearer Abbildungen ist wieder linear. $\big(L_1 \circ L_2\big)(v) := L_2\big(L_1(v)\big)$

Mit $+, \circ$ ist das Distributivgesetz erfüllt: $L_3 \circ (L_2 + L_1) = (L_3 \circ L_2) + (L_3 \circ L_1)$ usw.

Es gelten fast alle Regeln für $+, \circ$, außer daß es kein inverses Element bezüglich dieser Multiplikation und kein Kommutativgesetz gibt.

Das hat zu Folge, daß lineare Abbildungen $L \in Hom(V, V)$ in Polynome $P(X) := a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ eingesetzt werden können. Dies ist eine Abbildung, genauer gesagt eine Polynomabbildung.

$$\begin{array}{rcl} Hom(V,V) & \to & Hom(V,V) \\ L & \mapsto & P(L) := a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + \dots \end{array}$$

Wie unterscheiden sich dann Polynome von Polynomfunktionen?

Beispiel 15.1: Ein Polynom $P \in K[X]$ definiert auf natürliche Weise eine Funktion
$$\begin{array}{rrcl} P: & K & \to & K \\ & x & \mapsto & P(X) := W_X(P) \end{array}$$

Wir ersetzen das Symbol X in $P(X) = a_m X^m + \cdots + a_m \neq 0$ durch ein beliebiges Element $x \in K$. $\to$ ergibt $P(x) \in K \qquad x = a_m x^m + \cdots + a_0$

Also ordnet die Polynomfunktion jedem Urbild $x \in K$ ein Bild $P(x) \in K$ zu.

$P(X) := X^2 + 2X - 3\ \in \mathbb{Q}[X]$
$x \in \mathbb{Q} \quad W_x(P) = P(x) = x^2 + 2x - 3; \qquad$ z. B. $P(0) = -3;\ P(4) = 21\ \in \mathbb{Q}$

Im Allgmeinen sind Polynome $\in K[X]$ und Polynomfunktionen $\in Abb(K, K)$ **nicht** eindeutig verbunden.

Also ist die Abbildung $\begin{array}{rrcl} W: & K[X] & \to & Abb(K,K) \\ & P(x) & \mapsto & \big(x \mapsto P(x)\big) \end{array}$ nicht bijektiv.

Beispiel 15.2: $\mathbb{F}_2[X]$

Unterschiedliche Polynome vom Grad ≤ 2:
$0;\ 1;\ X;\ X+1;\ X^2;\ X^2+1;\ X^2+X;\ X^2+X+1$

$$\text{Polynomfunktionen} \quad P: \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \to & \mathbb{F}_2 \\ x & \mapsto & P(x) \end{array}$$

X	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$d(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$a(x) = 0 \quad b(x) = 1 \quad c(x) = x \quad d(x) = x+1$

$$\text{Lineare Abbildung:} \quad W: \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2[X] & \to & \mathbb{F}_2 \\ P(x) & \mapsto & \big(x \to P(x)\big) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} W(0) = a & W(1) = b & W(X) = c & W(X+1) = d \\ W(X^2+X) = a & W(X^2+X+1) = b & W(X^2) = c & W(X^2+1) = d \end{array}$$

$Ker(W) = \{0, X^2+X\}$

Polynome höherer Ordnung werden auch zu einer Kombination aus a, b, c, d.

Die Anzahl der Polynome $P \in \mathbb{F}_2[X]$ ist ∞,
die Anzahl der Polynomfunktionen $\in Abb(\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2)$ ist 4.

Die Abbildung ist surjektiv (Wertebereich $\widehat{=}$ ganze Zielmenge), aber nicht injektiv.

Polynome sind somit die Linarkombination von den Potenzen einer Unbestimmten. $1, X, X^2, \ldots$ (Nach Defintion l.u.)

Beispiel 15.3: $P(X) = 1 + X^2 \in Q[X]$ hat keine Nullstelle[3] $\in \mathbb{Q}$ ($x \in \mathbb{Q}$, Wertebereich $\in \mathbb{Q}$. $x \mapsto 1 + x^2$)

Die Polynomfunktion von $Hom(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2)$ auf sich selbst

$$\begin{array}{ccc} Hom(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2) & \to & Hom(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2) \\ L & \mapsto & 1 + L^2 \end{array} \qquad \textbf{hat eine Nullstelle.}$$

$L = D$, die $90°$ Drehung.

$$D\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D} D\begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Wir haben somit bewiesen, daß $D^2 = -1$ ist.

[3] $x = \alpha \in K \quad W_\alpha(P) = 0$

Definition von Funktionen

Zur Definition von Funktionen gehören der Definitionsbereich und Wertebereich.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \qquad x \in X \mapsto Z$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{g \circ f}$$

$\big(f \circ g\big)(x)$ (ist nicht unbedingt definiert)

Auch Polynomfunktionen brauchen die Wahl eines Definitionsbereiches (Argumentbereich), in dem man mit Elementen des Koeffizientenkörpers skalar multiplizieren und linearkombinieren kann.

$L := D$, die $90°$ Drehung: $\quad D: \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$

$D \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix}; \qquad D^2 = -1$

Ist die Abbildung linear? $\alpha \in \mathbb{Q}$; $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$

$$D \begin{pmatrix} \alpha \cdot q_1 + p_1 \\ \alpha \cdot q_2 + p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \cdot q_2 - p_2 \\ \alpha \cdot q_1 + p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \cdot q_2 \\ \alpha \cdot q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot D \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Nun $(1 + D^2) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + D^2 \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$

Also hat die Polynomfunktion $L \mapsto 1{+}L^2$ aus $Hom(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2)$ eine Nullstelle in $Hom(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2)$, während das Polynom $x \mapsto 1 + x^2$ aus $\mathbb{Q}[X]$ keine Nullstelle besitzt.

15.1. Lineare Abhängigkeit und lineare Abbildungen

Vor.: $v_1, \ldots, v_k \in V$ sind linear abhängig; V, W sind K-VR.

Behauptung 15.1. *Die Bilder $L(v_1), \ldots, L(v_k) \in W$ von der linearen Abbildung $L : V \to W \quad L \in Hom(V, W)$ sind auch linear abhängig,*
d.h. $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$, nicht alle$v_j = 0$, sodaß $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$

Darauf wird L angewendet:

$$L\Big(\sum_j \alpha_j v_j\Big) = L(0) = 0 \underbrace{=}_{\substack{L \text{ ist} \\ \text{linear}}} \sum_j \alpha_j \cdot L(v_j) \qquad \square$$

15.1.1. Folgerungen

Warnung Daraus, daß $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig sind, **folgt nicht**, daß die Bilder $\{L(v_1), \dots, L(v_k)\}$ linear unahängig sind.

Umkehrung Falls die Bilder $\{L(v_1), \dots, L(v_k)\}$ l. u. sind, so sind auch die Urbilder $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig.

Kurzfassung
$$\begin{array}{lllll} v_1, \dots, v_k & \text{l. a.} & \Rightarrow & L(v_1), \dots, L(v_k) & \text{l. a.} \\ v_1, \dots, v_k & \text{l. u.} & \not\Rightarrow & L(v_1), \dots, L(v_k) & \text{l. u.} \\ v_1, \dots, v_k & \text{l. u.} & \Leftarrow & L(v_1), \dots, L(v_k) & \text{l. u.} \end{array}$$

Also bilden lineare Abbildungen linear abhängige Vektoren auf linear abhängige Vektoren ab, während die Urbilder $\{v_1, \dots, v_k\}$ jedenfalls dann linear unabhängig sind, wenn die Bilder $\{L(v_1), \dots, L(v_k)\}$ es sind.

16. Austauschsatz

Vor.: $v_1, \dots, v_n \in V$ seien n linear unabhängige Vektoren.

Wir haben gesehen, daß die Menge aller Linearkombinationen $\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j v_j \mid \alpha_j \in K\right\} =: span_K(v_1, \dots, v_k)$ einen UVR $U \subset V$ bildet.

Beispiel 16.1: $V = \mathbb{Q}[x]$;
$v_1 = 1\,, v_2 = x\,, \dots, v_j = x^{j-1}\,, \dots, v_n = x^{n-1} \rightsquigarrow U := \mathbb{Q}_{n-1}[x]$ Polynome vom Grad $\leq n-1$

Behauptung 16.1. *In U gibt es höchstens n l. u. Vektoren. Hat man $n+1$ Vektoren, $w_1, \dots, w_{n+1} \in U$, sind sie stets linear abhängig. Egal wie kompliziert die Polynome sind, mehr als n linear unabhängige Vektoren findet man nicht.*

16.1. Wie erkennen wir l. a. Mengen an Vektoren?

Einfache Fälle:

- $\{0, u_1, \dots u_k\}$ sind immer l. a.: Wähle $\alpha_0 = 1;\ \alpha_1, \dots, \alpha_k = 0$
  $1 \cdot 0 + 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_k = 0$
- Die Vektoren $\{u_1, \dots u_k\}$ sind gegeben, 2 davon sind immer proportional, z. B. $u_2 = \lambda \cdot u_1;\ \lambda \in K$
  Wähle $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 0 \quad \lambda(u_1 - u_2) + 0 \cdot u_3 + \dots + 0 \cdot u_k = 0$

- Falls $\{0, u_1, \dots u_k\}$ l. a. sind, dann sind $\{0, u_1, \dots u_k, u\}$ auch l. a. $\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j + 0 \cdot u = 0\right)$

16.2. Wie kann man diese Behauptung beweisen?

Zunächst für $n = 1$:

Vor.: $w_1, w_2 \in U = span_K(v_1)$ sind Linearkombinationen von v_1.
$w_1 = \alpha_1 \cdot v_1,\ w_2 = \alpha_2 \cdot v_1;\ \alpha_1, \alpha_2 \in K$

Also sind w_1, w_2 l. a. (Klar: $\alpha_1 w_2 - \alpha_2 w_1 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 - \alpha_2 \cdot \alpha_1 = 0$)

Für $n = 2$:

Vor.: $v_1, v_2 \in U$ sind linear unabhängig; $w_1, w_2, w_3 \in U = span_k(v_1, v_2)$ d. h.

- $w_1 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2$
- $w_2 = \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2$
- $w_2 = \alpha_3 v_1 + \beta_3 v_2$

Behauptung 16.2. *w_1, w_2, w_3 sind linear abhängig*

Fallunterscheidung: Mindestens einer der $a_j \neq 0$ oder alle $a_j \neq 0$.

- Falls alle $a_j = 0$, dann sind w_1, w_2, w_3 Linearkombinationen von **einem** Vektor ($\rightarrow n = 1$-Fall).
- Ansonsten kann man o. b. d. A $a_1 \neq 0$ voraussetzen. Dann gilt: $v_1 = \frac{1}{a_1} w_1 - \frac{b_1}{a_1} v_2$

  Setze in w_1, w_2, w_3 ein:
  $w_1 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{a_1} w_1 - \frac{b_1}{a_1} v_2\right) + b_1 v_2 = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 = w_1$
  $w_2 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{a_1} w_1 - \frac{b_1}{a_1} v_2\right) + b_2 v_2 = \frac{a_2}{a_1} w_1 + \left(b_2 - a_2 \frac{b_1}{a_1}\right) v_2$
  $w_3 = a_3 \cdot \left(\frac{1}{a_1} w_1 - \frac{b_1}{a_1} v_2\right) + b_3 v_2 = \frac{a_3}{a_1} w_1 + \left(b_3 - a_3 \frac{b_1}{a_1}\right) v_2$

Wie eben gezeigt haben wir v_1 durch Terme von w_1 ersetzt und w_1, w_2, w_3 jetzt als Linearkombinationen von w_1 und v_2.

Wir suchen noch eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors mithilfe von w_1, w_2, w_3.

Fallunterscheidung: Entweder sind die beiden Koeffizienten von v_2 schon Null, dann sind w_2 und w_3 Vielfache von w_1, d. h. $\{w_1, w_2, w_3\}$ sind linear abhängig; oder mindestens einer der Koeffizienten von $v_2 = 0$.

Eventuell kann nach Umformung von zwei und drei $\underbrace{b_2 - a_2 \frac{b_1}{a_1}}_{=:c} \neq 0$ angenommen werden.

Dann ist $v_2 = \frac{1}{c}\, w_2 - \frac{1}{c}\, \frac{a_2}{a_1}\, w_1$.

Einsetzen in w_2, w_3:
$w_2 = \frac{a_2}{a_1} w_1 + cv_2 = 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_1$

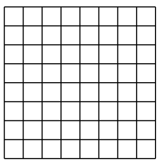
Es bleibt $w_3 = \frac{a_3}{a_1} w_1 + \left(b_3 - a_3 \frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{1}{c} w_2 - \frac{a_2}{c \cdot a_1} w_1\right)$, indem wir v_2 durch w_2 ausgetauscht haben, eine nicht-triviale Linearkombination. $\to w_1, w_2, w_3$ sind also **l. a.**

Genauso können wir für höhere n die lineare Abhängigkeit von $n{+}1$ Vektoren nachweisen. $\to$ Induktionsbeweis mir Induktionsanfang bei $n = 1$ oder $n = 2$.

Der allgemeine Induktionsschritt ist zwar nicht schwieriger als der Fall $n = 2$, aber „etwas“ länger aufzuschreiben.

Beispiel 16.2:

Zuerst ein Beispiel:



Schachbrett

Betrachte auf einem Schachbrett die Menge $W = \{w$; alle Wege eines Springers, der kein Feld doppelt betreten darf,$\}$

Offenbar gibt es „nicht verlängerbare Wege“ und „Wege größter Länge“.

Um zu entscheiden, ob ein Weg w die größte Länge hat, müssen wir w mit allen Wegen vergleichen.

Um zu entscheiden, ob ein Weg nicht verlängerbar ist, brauchen wir uns nur w anzusehen.

Analog ist es bei l. u. Vektoren.

Um dort zu entscheiden, ob eine Menge l. u. Vektoren in einem VR eine maximale **Anzahl** von Elementen enthält, müssen wir mit **allen Mengen** l. u. Vektoren in V vergleichen.

Um zu entscheiden, ob man zu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ **keinen weiteren** l. u. Vektor finden kann, müssen wir nur mit dieser einen Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ arbeiten.

Behauptung 16.3. *Es seien n l. u. Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ im K-VR V.*

Dann gibt es in $U := span_k\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ höchstens n linear unabhängige Vektoren, d. h. $n+1$ Vektoren $w_1, \ldots, w_{n+1} \in span_K(v_1, \ldots, v_n)$ sind stets linear abhängig.

Diese Aussage ist die einfachste Aussage über den Austauschsatz von Steinitz.

16.3. Austauschsatz von Steinitz

16.3.1. Aussage A

Vor.: $v_1, \dots, v_n$ seien linear unabhängig. $U = span_K(v_1, \dots, v_n)$ sei der VR der Linearkombinationen von $v_1, \dots v_n$.

Behauptung 16.4. *$(n+1)$ Vektoren $w_1, \dots, w_{n+1} \in U$ sind immer linear abhänig.*

16.3.2. Aussage B

Vor.: $w_1, \dots, w_n \in U$ sein linear unabhängig.

Behauptung 16.5. *Dann sind $v_1, \dots, v_n$ Linearkombinationen von $w_1, \dots, w_n$. „Umkehrung linear abhängiger Linearkombinationen“*

Bem: Aus B folgt A
Vor.: $v_1, \dots, v_n$ seien linear unabhängig.

Dann folgt (Fallunterscheidung):

1. **Entweder** $\exists$ unter $w_1, \dots, w_{n+1}$ n linear unabhängige Vektoren $\rightarrow$ durch Umbenennen sind $w_1, \dots, w_n$ l.u.
2. **oder nicht.** In diesem Fall sind $w_1, \dots, w_{n+1}$ erst recht l.a. (Aussage A)

Der erste Fall erfüllt die Voraussetzungen für B ($w_1, \dots, w_n \in U$ l.u.). Dann sagt die Aussage B: $v_1, \dots, v_n$ sind Linearkombination von $w_1, \dots, w_n$. Also $\ni w_{n+1} = \alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n$.

Nun ersetze v_j als Linearkombination der w_j. Damit ist w_{n+1} auch Linearkombination von $w_1, \dots, w_n$, d.h. $w_{n+1} = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$. (Also Behauptung A)

Induktionsanfang $n = 2$

1. $w_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{a_1}(w_1 - a_2 v_2)$
2. $w_2 = b_1 v_1 + b_2 v_2 \Rightarrow$ 1 in 2 einsetzen $\Rightarrow w_2 = \frac{b_1}{a_1}(w_1 - a_2 v_2) + b_2 v_2$
   $= c_1 w_1 + c_2 v_2$

Da w_1, w_2 l.u. sind $\Rightarrow c_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{c_2}(w_2 - c_1 w_1)$ Einsetzen in 1): $v_1 = d_1 w_1 + d_2 w_2$

Egal wie d_1, d_2 aussehen, ist die Hauptsache, daß v_1, v_2 aus w_1, w_2 berechenbar sind.

Induktionsvoraussetzung Für $n \leq N - 1$ ist der Satz bewiesen.

Induktionsschritt Dann folgt die Behauptung für $n = N$
$v_1, \dots, v_n$ sind l.u.

$$\begin{array}{lll} w_1 & = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1N}v_N & = \sum_{k=1}^N a_{1k}v_k \\ w_2 & = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2N}v_N & = \sum_{k=1}^N a_{2k}v_k \\ \vdots & = & = \vdots \\ w_j & = a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \dots + a_{jN}v_N & = \sum_{k=1}^N a_{jk}v_k \\ \vdots & = & = \vdots \\ w_N & = a_{N1}v_1 + a_{N2}v_2 + \dots + a_{NN}v_N & = \sum_{k=1}^N a_{Nk}v_k \end{array}$$

Fallunterscheidung:

Entweder sind $w_1, \dots, w_n$ Linearkombinationen der $(N-1)$ Vektoren $v_2, \dots, v_N$ und daher l.a, dann sind $v_1, \dots, v_N$ auch linear abhängig. Dieser Fall kommt nicht vor, da $\{w_1, \dots, w_N\}$ l.u. sind!
Oder mindestens einer der Koeffizienten a_{j1} von $v_1 \neq 0$. Durch Umbenennen erreichen wir, daß $a_{11} \neq 0$ ist.
$v_{11} = \frac{1}{a_{11}}w_1 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}v_2 + \dots + a_{1N}v_N)$
$\rightarrow$ Den Ausdruck in die übrigen Gleichungen einsetzen.
$w_1 = w_1$
$w_2 = b_{11}w_1 + b_{22}v_2 + \dots b_{2N} + b_{2N}v_N$
$\vdots = \quad \vdots$
$w_N = b_{N1}w_1 + b_{N2} + \dots + b_{NN}v_N$

Damit ist v_1 durch w_1 ausgetauscht.

Fallunterscheidung für die zweite Spalte:

Entweder ist einer der Koeffizienten $b_{22}, \dots, b_{N2} \neq 0$
oder keine: Das kommt nicht vor, denn $n = N-1$ ist nach der Induktionsvorraussetzung schon erledigt (l.a.).

Angenommen, daß wir auf diese Weise erreicht hätten, daß $v_1, \dots, v_{k-1}$ (nach möglicher Umbenennung) durch $w_1, \dots, w_{k-1}$ ausgetauscht sind, dann muß gezeigt werden, daß wir noch einen Schritt weiter kommen.

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1 \\ w_{k-1} &= w_{k-1} \\ w_k &= c_{k1}w_1 + \dots + c_{k,k-1}w_{k-1} + c_{kk}v_k + c_{kN}v_N \\ \vdots &= \quad \vdots \\ w_N &= c_{N1}w_1 + c_{N2}w_2 + \dots + c_{N,k-1}w_{k-1} + c_{Nk}v_k + c_{NN}v_N \end{aligned}$$

Jetzt sind $w_1, \dots, w_N$ als Linearkombination von $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n$ geschrieben.

k-te Spalte: Angenommen $c_{kk} = 0 = \cdots = c_{Nk} = 0$, dann wären $w_1, \ldots, w_N$ Linearkombination von $N-1$ Vektoren $w_1, \ldots, w_{k-1}, \cancel{v_k}, v_{k+1}, \ldots, v_N$. Also wären $w_1, \ldots, w_N$ l.a. Aber das kommt nach der Induktionsvoraussetzug für $n = N-1$ nicht vor.

Also kann nach der Umbenennung $c_{kk} \neq 0$ angenommen werden und v_k ausgetauscht werden durch
$v_k = \frac{1}{c_{kk}} w_k - \frac{1}{c_k k}(c_{k1} w_1 + \cdots + c_{k,k-1} w_{k-1} + c_{k,k+1} vk + 1 + \cdots + c_{kN} v_N)$
Damit ist das nächste v_k ausgetauscht.

Im letzten Schritt entsteht dann:
$v_N = d_1 w_1 + d_2 w_2 + \cdots + d_N w_N$ (Das d ist ungleich dem, welches wir schon vorher hatten.)

Also haben wir bewiesen:

Falls $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.u. sind und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ einerseits Linearkombinationen der v_j sind und andererseits ebenfalls l.u, dann können wir auch umgekehrt, jedes v_j als Linearkombination der w_k schreiben. $\square$

Definition 16.6. *Vektorräume, in denen jeder Versuch möglichst viele linear unabhängige Vektoren auszuwählen, nach endlich vielen Schritten abbricht, heißen* ***endlich dimensionale Vektorräume****.*

Bem: $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ sei eine maximale Menge linear unabhängiger Vektoren, d.h. für jedes $v \in V$ ist $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ l.a,
d.h. $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j + av = 0$ mit nicht allen $a_j = 0$.

Behauptung 16.7. *$a \neq 0$, weil $v_1, \ldots v_n$ l.u. vorausgesetzt. Also ist $v = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$, d.h. jeder Vektor in V ist Linearkombination der Vektoren einer maximal linear unabhängigen Menge.*

Der Austauschsatz behauptet, daß alle maximal linear unabhängigen Mengen gleich viele Vektoren enthalten.

16.3.3. Wie hilft der Austauschsatz

Aufgabe A Bestimme die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.u. Vektoren, die nicht vergrößert werden können.

Aufgabe B Bestimme die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.u. Vektoren, für die Anzahl n maximal ist.

Der Austauschsatz besagt, daß A und B *dieselbe* Antwort haben.

Bew: Aufgabe A sei gelöst: $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ sei eine Menge l.u. Vektoren, die nicht vergrößert werden kann, d.h. daß jedes $v \in V$ die Menge $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ l.a. ist.

Seien die Vektoren $w_1, \ldots, w_{n+1}$ Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$. Dann sind sie immer l.a, d.h. wir können auf **keine** Weise Mengen linear unabhängiger Vektoren **mit mehr als** n Elementen finden, somit ist auch B gelöst.