Teil IV.

Differentiation

11. Differenzierbarkeit einer Funktion

Definition 11.1. *Ein Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x = a$ **differenzierbar** (kurz: diffbar) oder **ableitbar** mit der **Ableitung** (Steigung) $f'(a) = m$, falls gilt:*

Es gibt ein Intervall um $x = a$: $[a - r\,,\, a + r]$ (für irgendein $r \in \mathbb{R}$) und eine Konstante K, so daß:

$$x \in [a - r, a + r] \implies -K(x-a)^2 \leq f(x) - \underbrace{(f(a) + f'(a)(x-a))}_{\textit{Tangente}} \leq \underbrace{K(x-a)^2}_{\textit{quad. Fehler}^1} \quad (11.1)$$

Aus der Definition tauchen folgende Fragen auf:

- Bestimmt diese Funktion die Steigung $f'(a)$ eindeutig?
- Ist die Bezeichnung „Steigung“ angemessen?

Diese Definition gilt nur für Funktionen, die von ihren Tangenten nicht stärker abweichen als $x \mapsto x^2$. Gibt es noch andere Funktionen die stärker von ihren Tangenten abweichen?

12. Differentiationsregeln

12.1. Linearkombinationen

Behauptung 1. *Seien $f(x), g(x)$ an der Stelle $x = a$ differenzierbar, dann sind die Funktionen $(k \cdot f)(x)$ (mit $K \in \mathbb{R}$) und $(f + g)(x)$ auch differenzierbar an der Stelle $x = a$.*

$$\begin{aligned} Also: (k \cdot f)'(a) &= k \cdot f'(a) \\ (f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

[1] D.h. so gut wie ein Kreis differenzierbar

*In anderen Worten: Die an der Stelle $x = a$ differenzierbaren Funktionen bilden einen VR und die Ableitung ist eine **lineare Abbildung**.*

Beweis: Voraussetzung: (11.1) ist für f erfüllt.

$(k \cdot f)(x) := k \cdot f(x)$

Probiere in demselben Intervall $x \in [a - r, a + r]$ wie für f:

$$\Big|kf(x) - \big(kf(a) + kf'(a)(x-a)\big)\Big| \leq \underbrace{|k| \cdot K}_{\text{geeignete Konstante}} \cdot |x-a|^2 \qquad \mathcal{OK}$$

Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (11.1) sind für f und g erfüllt:

$$x \in [a - r_f, a + r_f] \implies \Big|f(x) - \big(f(a) + f'(a)(x-a)\big)\Big| \leq K_f (x-a)^2$$

$$x \in [a - r_g, a + r_g] \implies \Big|g(x) - \big(g(a) + g'(a)(x-a)\big)\Big| \leq K_g (x-a)^2$$

Welches Intervall soll man nun für $f + g$ nehmen? Versuchen wir es mit:
$x \in [a - r_{f+g}\,,\, a + r_{f+g}]$ mit $r_{f+g} = min(r_f, r_g)$

Durch Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\Big|(f+g)(x) - (f+g)(a) - (f'+g')(a) \cdot (x-a)\Big|$$

$$\underbrace{\leq}_{\triangle-\text{Ungleichung}} \Big|f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x-a)\Big| + \Big|g(x) - g(a) - g'(a) \cdot (x-a)\Big|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{Voraussetzung}} K_f (x-a)^2 + K_f (x-a)^2 = (K_f + K_g) \cdot (x-a)^2 \;,$$

wobei $K_{f+g} := K_f + K_g$ die geeigente Konstante auf dem probierten Intervall ist. Also ist die Ableitung an der Stelle $x = a$ $(f' + g')(a)$. □

12.1.1. Anwendungsbeispiel

Satz 12.1. *Weil die Potenzfunktionen $P(x) = x^k$ differenzierbar sind mit der Ableitung $P'(x) = k \cdot x^{k-1}$, sind die Polynome $Q(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ differenzierbar mit der Ableitung*

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} \;. \tag{12.2}$$

Dabei kannn die Länge des Intervalles $[a - r, a + r]$ unabhängig von P gewählt werden; die Konstante K wird aus den Koeffizienten und den Intervallgrenzen (r) explizit berechnet.

Aufgabe: Beweise den Satz für Polynome dritten Grades $Q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Was ist die geeignete Konstante K?

Wenn wir zeigen können, daß gewisse Regeln aus der Definition folgen, brauchen wir nichts anderes als diese Regeln.

1. Linearkombination von f, g : $\quad h = \alpha f + \beta g$
   Regel: $\quad h' = \alpha f' + \beta g'$
2. Produkt $h = f \cdot g$; für f, g diffbar, mit den Ableitungen f', g'.
   Wie lautet die Regel für h'?
3. Komposition: $\quad h = f \circ g, \quad h' =?$

12.2. Produktregel

Wenn wir Differentiationsregeln haben, dann müssen diese auch für lineare Funktionen gelten. Diese Überlegung stellen wir an, um eine Idee für die allgemeine Form zu bekommen.

$f(x) = y_1 + m_1(x-a) \quad ; \quad f'(a) = m_1$
$g(x) = y_2 + m_2(x-a) \quad ; \quad g'(a) = m_2$

$$(f \cdot g)(x) = \underbrace{y_1 y_2 + (y_1 m_2 + y_2 m_1)(x-a)}_{\text{lineare Funktion}} + \underbrace{m_1 m_2 (x-a)^2}_{\text{quad. Fehler}} \tag{12.3}$$

Anscheinend ist $y_1 m_2 + y_2 m_1$ die Steigung von $f \cdot g$ an der Stelle $x = a$. Somit ist die Ableitung für das Produkt linarer Funktionen $f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$.

Jetzt betrachten wir allgemeine Funktionen f, g.

Voraussetzung: (11.1) sei für f, g erfüllt.

Behauptung 2. *Es gilt*[1]

$$\begin{aligned} & x \in [a - r_{fg}, a + r_{fg}] \;,\; r_{fg} = min(r_f, r_g) \\ \Longrightarrow \quad & \big|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a) - (fg' + gf')(a) \cdot (x-a)\big| \le K(x-a)^2 \;. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= l_f(x) + Abw_f(x) \quad , \quad & l_f(x) &:= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) \\ g(x) &= l_g(x) + Abw_g(x) \quad , \quad & l_g(x) &:= g(a) + g'(a) \cdot (x-a) \;. \end{aligned}$$

[1] Das Resultat für lineare Funktionen wurde als Idee genommen

$$\left.\begin{array}{rcl} Abw_f(x) & \le & K_f|x-a|^2 \\ Abw_g(x) & \le & K_g|x-a|^2 \end{array}\right\} \equiv (11.1)$$

$$f(x)\cdot g(x) = \underbrace{l_f(x)\cdot l_g(x)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{l_f(x)\cdot Abw_g(x) + l_g(x)\cdot Abw_f(x)}_{\mathrm{II}} + \underbrace{Abw_f(x)\cdot Abw_g(x)}_{\mathrm{III}}$$

$$\mathrm{I} := l_f(x)\cdot l_g(x) = \underbrace{f(a)\cdot g(a) + \big(f(a)g'(a) + g(a)f'(a)\big)\cdot(x-a)}_{\text{erwartete Tangente } l_{fg}} + \underbrace{f'(a)g'(a)}_{=:K_{\mathrm{I}}}\cdot(x-a)^2$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{III} & := & Abw_f(x)\cdot Abw_g(x) \;\le\; K_fK_g(x-a)^4 \le K_f\cdot K_g\cdot r_{fg}^2(x-a)^2 \\ & & x\in[a-r_{fg}, a+r_{fg}] \implies x-a\le r_{fg} \end{array}$$

Auf dem Intervall $x\in[a-r_{fg}, a+r_{fg}]$ gilt:

$|l_f(x)| \le |f(a)| + |f'(a)|\cdot r \;=:\; S_f$
$|l_g(x)| \le |g(a)| + |g'(a)|\cdot r \;=:\; S_g$

S_f, S_g sind die Schranken für die lineare Approximation von f und g. Daraus folgt:

$$\mathrm{II} := |l_f(x)\cdot Abw_g(x)| + |l_g(x)\cdot Abw_f(x)| \le \underbrace{(S_fK_g + S_gK_f)}_{=:K_{\mathrm{III}}}\cdot(x-a)^2$$

Man kann also die drei Gleichungen zusammenfassen, mit $K = K_{\mathrm{I}} + K_{\mathrm{II}} + K_{\mathrm{III}}$:

$$\forall x\in[a-r_{fg}, a+r_{fg}] \text{ gilt: } \left|(fg)(x) - \Big((fg)(a) + \big(fg'+gf'\big)(a)\cdot(x-a)\Big)\right| \le K\cdot(x-a)^2 \tag{12.4}$$

Der Unterschied zwischen dem Produkt $f\cdot g$ und der erwarteten Tangente ist im selben Sinne ein kleiner Fehler, wie er auch für f und g vorausgesetzt wurde.

Weil diese Ungleichung gilt, ist die erwartete Tangente tatsächlich die Tangente der **Produktfunktion** mit der Ableitung von $f\cdot g$ an der Stelle $x=a$:

$$\big(f\cdot g\big)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a) \tag{12.5}$$

12.3. Kettenregel

Seien F, f differenzierbar. Was ist dann die Ableitung der Verknüpfung der beiden Funktionen $\big(F\circ f\big)(x) := F\big(f(x)\big)$?

Probieren wir es wieder zuerst mit linearen Funktionen aus, denn, was allgemein gilt, muß auch für lineare Funktionen gelten.

$$\begin{array}{rcll} f:\; x\mapsto f(x) & = & f(a) + m(x-a)\,, & a,x\in\mathbb{R} \text{ und im Definitionsbereich von } f \\ F: X\mapsto F(X) & = & F(A) + M(X-A)\,, & A,X\in\mathbb{R} \text{ und im Definitionsbereich von } F \end{array}$$

Als Voraussetzung geben wir an, daß der Wert der inneren Funktion an der Stelle a gleich A sein soll: $F\big(f(a)\big) = F(A)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F\big(f(a)\big) &= F(A) + M \cdot (f(x) - A) \\ &= F(A) + M \cdot (\cancel{f(a)} + m(x-a) \cancel{-A}) \\ &= F(A) + \underbrace{Mm}_{1}(x-a) \end{aligned}$$

Unsere Regel, die wir für lineare Funktionen gefunden haben, muß auch mit derjenigen für Allgemeine übereinstimmen.

Voraussetzung: F, f seien diffbar an der Stelle a; also es gilt (11.1) für f und F, d.h.

$$|x-a| \le r \implies \Big|f(x) - \big(f(a) + f'(a)\cdot(x-a)\big)\Big| \le k(x-a)^2 \tag{12.6}$$

$$|X-A| \le R \implies \Big|F(X) - \big(F(A) + F'(A)\cdot(X-A)\big)\Big| \le K(X-A)^2$$

Falls $|f(x) - f(a)| \le R$ ist[2], dann folgt:

$$\Big|F\big(f(x)\big) - F\big(f(a)\big) - F'\big(f(a)\big)\cdot\big(f(x)-f(a)\big)\Big| \le K\cdot\big(f(x)-f(a)\big)^2 \tag{12.7}$$

Aus (12.6) folgt unter Anwendung der $\triangle$-Ungleichung:

$$|x-a| \le r \implies |f(x)-f(a)| \le \big(|f'(a)| + kr\big)|x-a| \tag{12.8}$$

$\Big|F'\big(f(a)\big)\Big| \times (12.6)$: $\quad |x-a| \le r \quad \implies$

$$\Big|F'\big(f(a)\big)\cdot\big(f(x)-f(a)\big) - F'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)\cdot(x-a)\Big| \le \Big|F'\big(f(a)\big)\Big|\cdot k|x-a|^2$$

$\triangle$-Ungleichung: $$\Big|F'\big(f(a)\big)\cdot\big(f(x)-f(a)\big)\Big| \le F'\big(f(a)\big)\cdot\big|f'(a)\cdot(x-a) + k(x-a)^2\big| \tag{12.9}$$

(12.8) und (12.9) in (12.7) einsetzen:

$$\Big|F\big(f(x)\big) - F\big(f(a)\big) - F'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)\cdot(x-a)\Big| \le \underbrace{\Big(K\cdot\big(|f'(a)| + kr\big)^2 + k\cdot\Big|F'\big(f(a)\big)\Big|\Big)}_{\substack{K_{F\circ f} \\ \text{Fehlerkonstante für die Verkettung}}}\cdot(x-a)^2$$

Jetzt haben wir alles als Funktionen des ursprünglichen Argumentes von x.

$$\Big|F\big(f(x)\big) - F\big(f(a)\big) - \underbrace{F'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)}_{\substack{(F\circ f)' \\ \text{ist das Produkt von} \\ \text{Steigungen, wie erwartet.}}}\cdot(x-a)\Big| \le K_{F\circ f}\cdot(x-a)^2$$

Somit lautet die **Kettenregel**:

$$\big(F\circ f\big)'(x) = F'\big(f(x)\big)\cdot f'(x) \tag{12.10}$$

Innerhalb des Beweises muß $|f(x) - f(a)| \le R$ garantiert werden, ansonsten kann die Funktion F nicht auf die Argumente $X = f(x)$ angewandt werden. Um das zu gewährleisten, muß eventuell noch r verkleinert werden.

[1] Die Steigungen multiplizieren sich
[2] Differenzierbarkeitsvoraussetzung

12.4. Wozu braucht man diese Regeln?

Diese Regeln werden benötigt, um komplizierte Funktionen F zu differenzieren, die aus einfachen differenzierbaren Bausteinen $f_1, \dots, f_n$ „zusammengesetzt“ sind (mit Linearkombinationen, Verkettungen, Produkten).

In diesen Fällen sagen uns die Regeln:

1. F ist differenzierbar.
2. daß wir F' aus den Ableitungen $f'_1, \dots, f'_n$ bestimmen können (unter irgendwelchen Voraussetzung).

Zusammenfassung:

a	Linarkombinationen:	$h = \alpha f + \beta g$:	$h'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
b	Produkte:	$h = f \cdot g$:	$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
c	Kompositionen:	$h = f \circ g$:	$h'(x) = f'\big(\underbrace{g(x)}_{1}\big) \cdot g'(x)$

12.4.1. Anwendung

Beispiel 1. *Betrachten wir ein Polynom $P(x)$. Wann hat P eine Nullstelle bei $x = a$?*

Wir wissen schon: $W_a(P) = P(a) = 0 \iff P = (x-a) \cdot Q_1$.

Wann ist $x = a$ eine zweifache (bzw. n-fache) Nullstelle von P?

$P(a) = P'(a) = 0 \qquad \iff \qquad \big(P = (x-a)Q_1\,,\ Q_1 = (x-a)Q_2\big)$

$P(a) = P'(a) = P''(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$
$\iff \quad \big(P = (x-a)Q_1\,,\ Q_1 = (x-a)Q_2\,, \dots,\ Q_{(n-1)} = (x-a)Q_n\big),$

also wenn P eine Nullstelle und P' eine $(n-1)$-fache Nullstelle bei $x = a$ hat.

Beispiel 2. *Seien $f(x), F(x)$ differenzierbar mit den Ableitungen $f'(x), F'(x)$.*

$g := F \circ f \quad , \quad F : x \mapsto \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$. Also sind $F'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Wie ist die Ableitung von $g(x)$? Durch Anwendung der Kettenregel erhalten wir:

$$g'(a) = F'\big(f(a)\big) \cdot f'(a) = -\frac{1}{(f(a)^2} \quad \textit{oder} \quad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{(f)^2}$$

Etwas allgemeinerer: Seien f, g differenzierbar und $g > 0$. Was ist dann die Ableitung von $h := \frac{f}{g}$?

[1] Der Wertebereich von g muß im Definitionsbereich von f liegen.

Durch Anwendung der Produktregel auf $h = f \cdot \frac{1}{g}$ *, erhalten wir:* $\quad h' = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' + \left(\frac{1}{g}\right) \cdot f'$.

$$\textbf{\textit{Quotientenregel:}} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2} = \frac{f}{g}\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)$$

$$\textit{Für} \quad h = \frac{f}{g} \quad \textit{ist} \quad \frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \ .$$

Bezeichnung: Für positive Funktionen $f > 0$ heißt $\frac{f'}{f}$ deren **Wachstumsrate** (z. B. die Geburtenrate).

In naturwissenschaftlichen Anwendungen sind die quadratischen Fehler oft vernachlässigbar klein. Dann gibt die Ableitung an, wie sich die **Fehler der Argumente auf die Fehler der Werte** einer Funktion auswirken.

Absolute Fehler:	Δf	$:=$	$f(x) - f(a)$	$\approx$	$f'(a) \cdot (x - a)$
Relative Fehler:	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$:=$	$\dfrac{f(x) - f(a)}{f(a)}$	$\approx$	$\dfrac{f'}{f}(a) \cdot (x - a)$

Um vom Absoluten auf den relativen Fehler zu kommen, muß man durch $f(a) > 0$ dividieren.

Jetzt haben wir genügend Regeln, um eine Fülle von Funktionen zu differenzieren – und zwar schnell (ohne die Differenzierbarkeitsdefinition benutzen zu mussen.