Teil III.

Polynome

8. Rechnen mit Polynomen

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \cdots + a_n X^n$$

n : **Grad des Polynoms**, wenn $a_n \neq 0$ ist.

Wir können Polynome untereinander addieren und sie mit Zahlen multiplizieren:

Addition

$$Q(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_n X^n$$
$$(P+Q)(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n$$

Falls P und Q Polynome vom Grad $\leq n$ sind, so auch $P+Q$.

Welche Regeln erfüllt diese Addition:

- Assoziativität
- Kommutativität
- $\exists$ neutrales Element: Null-Polynom (alle Koeffizienten $= 0$)
- Inverses Element zu P ist das Polynom $(-a_0) + \cdots + (-a_n X^n)$

$\Rightarrow$ Die Addition erfüllt alle Regeln einer kommutativen Gruppe
$\Leftrightarrow$ $(\mathbb{Q}[X], +)$ ist eine abelsche Gruppe[1].

Multiplikation Für $P, Q \in \mathbb{Q}_n[X], r, s \in \mathbb{Q}$, können wir auch $r \cdot P$ definieren:

$$r \cdot P = ra_0 + ra_1 X + \cdots + ra_n X^n$$

Dabei gelten folgende Regeln:

$$\left.\begin{aligned} r \cdot (P+Q) &= (r \cdot P) + (r \cdot Q) \\ (r+s) \cdot P &= (r \cdot P) + (s \cdot P) \end{aligned}\right\} \textit{Distributivgesetz}$$
$$(r \cdot s) \cdot P = r \cdot (s \cdot P) \quad \textit{Assoziativgesetz}$$

Diese Regeln heißen zusammengefasst **Axiome eines Vektorraumes**

[1] Falls P die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ hat, schreiben wir: $P \in \mathbb{Q}[X]$
Falls Grad $P \leq n$, dann schreiben wir $P \in \mathbb{Q}_n[X]$

9. Vektorräume

9.1. Sprachregelung

Definition 9.1. *Ein* **Vektorraum über dem Körper** $K(V,+,\cdot)$ *(kurz K-Vektorraum) ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen (Verknüpfungen)*

$$\begin{array}{lrl} \textit{(Vektoraddition)} & + : & V \times V \to V \\ & & (v+w) \mapsto v+w \quad \forall v,w \in V \\ \textit{(Skalare Multiplikation)} & \cdot : & K \times V \to V \\ & & (r\cdot v) \mapsto r\cdot v \quad \forall v \in V, \forall r \in K \ , \end{array}$$

so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

V1 $(V,+)$ *ist eine kommutative Gruppe.*

V2 $\forall v,w \in V$, $\forall r,s \in K$ *gilt:*

1. $(r+s)\cdot v = r\cdot v + s\cdot v$
2. $r\cdot(v+w) = r\cdot v + r\cdot w$
3. $(r\cdot s)\cdot v = r\cdot(s\cdot v)$
4. $1\cdot v = v$, *mit 1, dem neutralen Element der Multiplikation in K*

Die Elemente von V heißen ***Vektoren*** *und die Elemente aus K* ***Skalare****.*

Das neutrale Element der Addition in V wird ***Nullvektor*** *genannt.*

$\{$Polynome der Veränderlichen X mit den Koeffizienten $a_n \in K\} =: K[X]$

formal also ein Ausdruck in der Form:

$$P(X) := a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{i=0}^{n} a_iX_i$$

$$Grad(P) := \begin{cases} n, & \text{falls } a_n \neq 0 \text{, d.h. } max\{i|a_i \neq 0\} \\ -1, & \text{falls } P = 0 \end{cases}$$

Die Regeln für das Rechnen mit Polynomen und ihren Koeffizienten[2] werden zu Axiomen eines Vektorraums.

Bemerkung. Auch mehrere Variablen sind möglich:

[2] $(\mathbb{Q}[X],+,\cdot)$, also addieren und mit K-Elementen multiplizieren.

Polynome der Veränderlichen $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ mit Koeffizienten in K, formale Ausdrücke der Form:

$$f = \sum_{n_N} \cdots \sum_{n_2} \sum_{n_1} a_{n,n_2,\dots,n_N} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_N^{n_N} \in K[X_1, X_2, \dots, X_N]$$

Vektorraum über Körper K (K-VR) ist definiert als:

Eine Gruppe $(V, +)$ mit Addition zwischen Elementen von V

$$\begin{array}{rccl} + : & V \times V & \to & V \\ & (v, w) & \mapsto & v + w \end{array}$$

zusammen mit den Distributivgesetzen der skalaren Multiplikation mit Elementen aus K:

$$\begin{array}{rccl} \cdot : & K \times V & \to & V \\ & (\alpha, v) & \mapsto & \alpha \cdot v \end{array}$$

Also mit $P, Q \in K[X]$ und $\alpha \in K$, gilt:

$$\begin{aligned} P &= \sum a_i X_i \ , \quad Q = \sum b_i X_i \\ P + Q &= \sum (a_i + b_i) X_i \\ \alpha \cdot P &= \sum (\alpha a_i) X_i \end{aligned}$$

Mit diesen Verknüpfungen wird $K[X]$ zu einem K-Vektorraum.

9.2. Beispiele von Vektorräumen

1. Polynome (vom Grad $\leq n$) mit Koeffizienten in $K(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_5, \dots) \to K[X_1, X_2, \dots]$

   Ausserdem ist K selbst auch ein K-Vektorraum, nämlich ein Grad 0-Polynomvektorraum.

2. $$P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$$

   Addition von Punkten: $P + Q = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

   Skalarmultiplikation: $\alpha \cdot P = \alpha(x_1, y_2)$

3. K-Körper:

   Definiere: $V := K^n = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \middle| \ k_i \in K \right\}$