Teil II.

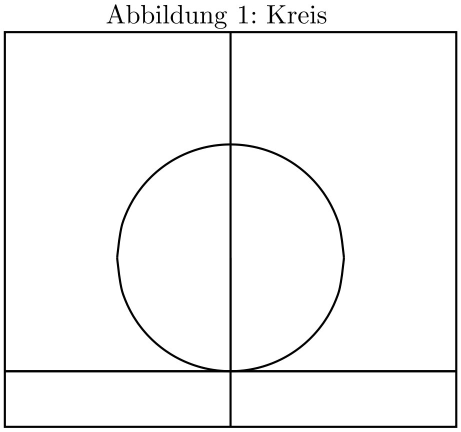
Tangenten

6. Tangente der quadratischen Parabel

6.1. Was ist die Tangente der Parabel $P(x) = x^2$ an der Stelle $x = a$?

Wir wollen Eigenschaften der Parabel studieren, die uns erlauben, auch für quadratische Parabeln, wie für Kreise, Tangenten zu definieren.

Abbildung 1: Kreis



Sei (x, x^2) ein beliebiger Punkt links oder rechts von (a, a^2), dann ist für jedes $x \neq a$ die Sehnensteigung über das Intervall $[a, x], [x, a]$:

$$\frac{P(x) - P(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

- x ist rechtseitig von a: Falls $x > a$, so ist $x + a > 2a$
- x ist linksseitig von a: Falls $x < a$, so ist $x + a < 2a$

Also haben alle rechtsseitigen Sehnen eine größere Steigung, während alle linksseitigen eine kleinere Steigung als die Tangente haben. Somit können wir auf eine vorläufige Tangente mit einer Steigung von $2a$ an dem Punkt $x = a$ schließen.

Setzen wir das in die allg. Lineare Funktion ein:

$$f(x) = b + m(x - a) \;\text{ mit } b := \text{„Wert an d. Stelle } a\text{“ und } m := \text{ Steigung}$$

Dann ergibt sich daraus:

$$l(x) := a^2 + 2a(x - a) \;\text{ mit } a^2 = l(a) = P(a) \text{ und } 2a := \text{Steigung}$$

Der Graph dieser Tangentenfunkion erfüllt die geforderten Eigenschaften:

- Steigung < als die Steigung der rechtsseitigen Sehne
- Steigung > als die Steigung der linksseitigen Sehne.

Das kann man mit einem Kreis vergleichen. In einem Kreis, trifft jede Kreistangente das Innere nicht, sondern berührt ihn nur, d. h. die Tangente lässt den Kreis nur auf einer Seite. Unsere vorläufige Tangente hat die gleiche Eigenschaft im Bezug auf die Parabel.

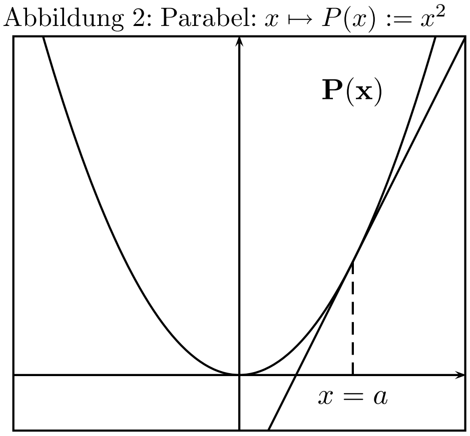
Der Graph der Parabel $P(x) = x^2$ liegt oberhalb der vorläufigen Tangente,
d.h. an jeder Stelle x ist $x^2 \geq a^2 + 2a(x - a) \quad (P(x) \geq l(x))$

Der Abstand zwischen der Parabel und der Parabeltangente beträgt:

$$\begin{aligned} P(x) - l(x) &= x^2 - (a^2 + 2a(x - a)) = x^2 - a^2 - 2a(x - a) = (x - a)(x + a - 2a) \\ &= (x - a)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \text{Die Gerade } l(x) \text{ liegt unterhalb der Parabel } P(x) \end{aligned}$$

Das veranlasst uns, den Graphen der linearen Funktion $l(x)$ als Parabeltangente zu bezeichnen.

Abbildung 2: Parabel: $x \mapsto P(x) := x^2$



6.2. Wie weit weicht die Tangente vom Graphen der Parabel ab

Wir betrachten einen vom Berührpunkt verschiedenen Tangentenpunkt $(x, l(x)), x \neq a$.

- sein Abstand vom Berührpunkt ist **mindestens** gleich dem Abstand parallel zur x-Achse: $|x-a|$
- sein Abstand zur Parabel ist **höchstens** gleich der parallel zur y-Achse gemessenen Entfernung: $P(x) - l(x) = (x-a)^2$

$$\frac{\text{Abstand des Tangentenpunktes von der Parabel}}{\text{Abstand des Tangentenpunktes vom Berührpunkt}} \leq \frac{(x-a)^2}{|x-a|}$$

Der Tangentenpunkt $(x, l(x))$ ist also viel näher an der Parabel als am Berührpunkt der Tangente.

Zum Vergleich gilt für den Abstand eines Kreises von seiner Tangente:

$$\begin{aligned}
&(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\ &(y-1)^2 = 1 - (x-a)^2 \qquad (x-a) < 1 \\
&\Leftrightarrow y - 1 = -\sqrt{1-(x-a)^2} \\
&\quad \Leftrightarrow y = 1 - \sqrt{1-(x-a)^2} \cdot \frac{1+\sqrt{1-(x-a)^2}}{1+\sqrt{1-(x-a)^2}} = \frac{(x-a)^2}{\underbrace{1+\sqrt{1-(x-a)^2}}_{\text{N zw. 1 u. 2}}} \\
&\quad \Rightarrow \frac{1}{2}(x-a)^2 \leq y \leq (x-a)^2
\end{aligned}$$

Für Kreis, sowie P ist die Abweichung von der Tangente $\leq (x-a)^2$

Zu jedem Parabelpunkt (a, a^2) gibt es einen Kreis, so dass die Parabel zwischen Kreis und seiner Tangente verläuft. Die Kreistangente ist an diesem Punkt ebenfalls Parabeltangente, also auch $l(x)$.

6.3. Welchen Kreis nehmen wir?

$\Leftrightarrow$ Wo ist der Mittelpunkt.

Aus der Definition der Kreistangente $\Rightarrow$ Mittelpunkt des Kreises liegt auf derjenigen Geraden durch (a, a^2), die **senkrecht** zur Kreistangente bzw. Parabeltangente ist. Diese Gerade heißt **Normale** der Parabel und ist Graph der Funktion:

$$\begin{aligned}
n(x) &:= -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 \\
n(0) &:= a^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

→ Schnittpunkt $(0, n(0))$ der Normalen mit y-Achse ist Mittelpunkt.

Abstand zu (a, a^2) → Raduis ⇒ $r^2 = \frac{1}{4} + a^2$

→ Kreisgleichung: $(x-0)^2 + (y - \frac{1}{2} - a^2)^2 = \frac{1}{4} + a^2$

Wie stellen wir fest, dass die Parabel das Innere des Kreises nicht trifft?
⇔ Dass die Parabel ausserhalb des Kreises liegt?

Wenn wir $(x, y) = (x, x^2)$ in die linke Seite der Kreisgleichung einsetzen und das $\geq r^2$ gilt, dann liegt (x, y) ausserhalb des Kreises:

$$x^2 + (\underbrace{x^2}_{P(x)} - \underbrace{(a^2 + \frac{1}{2})}_{n(0)})^2 \overset{?}{\geq} \underbrace{a^2 + \frac{1}{4}}_{r^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^2 + (x^2 - (a^2 + \frac{1}{2}))^2 - a^2 - \frac{1}{4} \overset{?}{\geq} 0 \\
&= x^2 + x^4 - 2x^2(a^2 + \frac{1}{2}) + (a^2 + \frac{1}{2})^2 - a^2 - \frac{1}{4} \\
&= x^2 + x^4 - 2x^2a^2 + x^2a^2 + a^4 + a^2 + \frac{1}{4} - a^2 - \frac{1}{4} \\
&= x^4 - 2x^2a^2 + a^4 = (x^2 - a^2)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Wir haben jetzt genug Vergleiche zwischen Parabel und Kreis, um definieren zu können.

Definition 6.1. *Die Gerade $l(x) := a^2 + 2a(x-a)$ heißt Tangente der Parabel $x \mapsto x^2$ an der Stelle $x = a$. Die Steigung dieser Geraden nennen wir die* ***Steigung der Parabel an der Stelle x=a***

6.4. Hohlspiegeleigenschaft der Parabel

Lichtstrahlen werden an Kurven so reflektiert, dass Einfallswinkel (gegen Normale) = Austrittswinkel.

Bei der Parabel werden parallel zur y-Achse einfallende Strahlen durch den Punkt $(0, \frac{1}{4})$ reflektiert.

Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines **Thaleskreises** für ein rechtwinkliges Dreieck aus y-Achse, Normale und Tangente - und heißt Brennpunkt der Parabel.

Man kann noch eine weitere geometrische Eigenschaft an der Parabel feststellen: Jeder Punkt (x, x^2) ist gleich weit von diesem Brennpunkt und von einer „Leitgeraden“ $y = -\frac{1}{4}$

entfernt.

$$\text{Abstand vom Brennpunkt} = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4} = \text{Abstand von der Leitgeraden}$$

Dadurch haben wir jetzt zwei verschiedene Definitionen einer Parabel:

1. Graph der Funktion $x \mapsto x^2$.
2. die Menge der Punkte in der euklidischen Ebene, die gleich weit von einem Punkt ("Brennpunkt") und einer Geraden ("Leitgeraden") entfernt sind.

Analog ergeben sich auch unterschiedliche Definitionen für die Parabeltangente:

1. Betrachten wir die Parabel als Graphen der Funktion $x \mapsto x^2$, so ist die Tangente der Graph einer linearen Funktion. Die Tangente an der Stelle $x = a$ ist Graph von $l(x) := a^2 + 2a(x - a)$
2. Geometrisch ist die Tangente am Parabelpunkt P definiert als: Winkelhalbierende der Strecke von P zum Brennpunkt und von P zur Leitgeraden.

Wir haben herausgefunden, daß für Kreise und Parabeln gilt, daß wir geeignete Geraden finden können, um sie als Tangen zu beschreiben. – Was nehmen wir jedoch bei anderen Kurven?

6.5. Polynome $P(x)$

Wir wollen jetzt auch den Graphen von Polynomen untersuchen. Wir wollen auch Polynome mit linearen Funktionen approximieren, da es leicht ist, lineare Funktionen anzugeben.
$l(x) := m(x - a) + b$,
mit $m :=$ Steigung an der Stelle $x = a$ und
$b :=$ Wert der anzunähernden Fkt. an der Stelle $x = a$

Falls l an der Stelle a Tangente des Polynoms P ist, so definieren wir die Steigung der Tangente auch als **Steigung des Polynoms** P an der Stelle a.

Umgekehrt: Falls die Steigung eines Polynoms P an der Stelle a sich bestimmen lässt, so soll die Gerade $l(x) := m(x - a) + P(a)$ die Tangente sein.

Differenz/Abweichung: Polynom $P -$ lineare Funktion l
$P(x) - l(x) = P(x) - P(a) - m(x - a) = (\frac{P(x)-P(a)}{x-a} - m)(x - a)$

Also lässt sich die Differenz der Funktionen mithilfe von
(Sehnensteigung-Geradensteigung)$\cdot(x-a)$
als Differenz von Steigungen ausdrücken.

Das heißt wir müssen entweder den Begriff **Steigung** oder den Begriff **Tangente** einer Funktion an der Stelle a definieren, der jeweils andere Begriff ist dann einfach dazu gegeben.

7. Die Potenzfunktion $P(x) := x^n$

Wir wollen zeigen, daß die Steigung an einer Stelle $x = a$ so definiert werden kann, daß die Werte ebenso „wenig“ von der linearen Funktion $x \mapsto P(a) + m(x-a)$ abweichen, wie wir es bei $x \mapsto x^2$ beobachtet haben.

Wir beginnen mit dem Ausrechnen der Sehnensteigung.

$$\frac{P(x)-P(a)}{x-a} := \frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

Beweis: Zu beweisen ist:

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

Multipliziere beide Seiten mit $(x-a)$; links haben wir $x^n - a^n$ und rechts:

$$\begin{aligned}
& (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})(x-a) \\
= \; & x^{n-1}(x-a) + ax^{n-2}(x-a) + \cdots + a^{n-2}x(x-a) + a^{n-1}(x-a) \\
= \; & (x^n - ax^{n-1}) + (ax^{n-1} - a^2x^{n-1}) + \cdots + (a^{n-2}x^2 - a^{n-1}x) + (a^{n-1}x + a^n) \\
= \; & x^n - a^n
\end{aligned}$$

Da alle Terme außer x^n und a^n auf der linken Seite bei der Multiplikation mit $(x-a)$ doppelt auftreten, einmal mit positiven und einmal mit negativen Vorzeichen, kürzen sie sich raus.

Zunächst setzen wir $x, a > 0$ vorraus. Dann sind die rechtsseitigen Sehnensteigungen $(a < x) : > na^{n-1}$ und die linksseitigen Sehnensteigungnen $(a > x) : < na^{n-1}$.

Also liegt na^{n-1} zwischen den links- und rechtsseitigen Sehnensteigungen und ist daher die erwartete **Steigung von** $P = x^n$ **an der Stelle** a. somit es das auch die Steigung der erwarteten Tangente:

$l_a(x) := na^{n-1}(x-a) + a^n$

Diese Erwartung ist berechtigt, **wenn** wir zeigen können, daß die lineare Funktion $l(x)$ von dem Graphen von P nicht stärker abweicht, als wir es bei $x \mapsto x^2$ beobachtet haben. Also beträgt die Abweichung:

Funktion - Tangente $= (x-a)$(Sehnensteigung-Geradensteigung)
$\Leftrightarrow x^n - (a^n + na^{n-1}(x-1) = (x-a)(x^{n-1} + xn - 2a + xa^{n-2} + \cdots + a^{n-1} - na^{n-1})$

Wenn $x > a$ sieht man, daß sowohl der erste als auch der zweite Klammerausdruck rechtsseitig vom Gleichheitszeichen > 0 sind. Somit ist das Produkt auch größer Null. Für $x < a$ sieht man, daß der erste und der zweite Klammerausdruck < 0 sind, somit folgt, daß das Produkt der beiden größer Null ist.

Daraus kann man schließen, daß der Graph der Funktion $x \mapsto x^n$ oberhalb der erwarteten Tangente liegt.

Beim Kreis gilt auch, daß nicht alle Punkte der Tangente nahe am Kreis sind.
$\rightarrow$ Daher verlangen wir, daß sie sehr nahe bei ihrer Kurve bleibt, wenn wir nicht „zu weit“ vom Berührpunkt weg sind.

Vorraussetzung: $x, a \geq 0 \;\Rightarrow$ Funktion-Tangente $= x^n - (a^n + na^{n-1}(x-a)) > 0$

Verlangen: T bleibt nahe bei der Kurve, wenn wir nicht zu weit vom Berührpunkt entfernt sind. Nun ersetze man die Einschränkung $x, a \geq 0$ durch $a, x \in [-R, R]$.

Notation von Intervallen

Intervalle sind Teilstücke der reellen Geraden.
Für $a, b \in \mathbb{R}$ wird definiert:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ heißt **abgeschlossenes Intervall**
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ heißt **offenes Intervall**

Analog dazu gibt es halboffene Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$.
a, b heißen Randpunkte.
Für unendliche Intervalle:
$\mathbb{R}_{\geq a} := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
$\mathbb{R}_{> a} := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

$P(x) = x^n;\; a, x \in [-R, R]$.
|Funktionswert - Tangentenwert| $= |x - a| \cdot |$ Sehnensteigung - Tangentensteigung|

Tangente $l_a(x) := na^{n-}(x-a) + a^n$

Also hier:

$$\begin{aligned}
|x^n - l_a(x)| &= |x^n - na^{n-1}(x-a) - a^n| = |x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)| \\
&= |(x-a)(x^{n-1} + \cdots + a^{n-1}) - na^{n-1}(x-a)| \\
&= |x-a| \cdot |\underbrace{x^{n-1} + \cdots + a^{n-1}}_{n\text{-Terme}} - na^{n-1}| \\
&= |x-a||(x^{n-1} - a^{n-1}) + (ax^{n-2} - a^{n-1}) + \cdots + (a^{n-1}x - a^{n-1})|
\end{aligned}$$

Dreiecksungleichung (Beweis selbst zu erarbeiten)

1. Zeige für $a, b \in \mathbb{R}$ $|a+b| \leq |a| + |b|$
2. Unter welchen Vorraussetzungen für a, b gilt: $|a+b| = |a| + |b|$?
3. Folgere aus 1 für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$
4. Ähnlich: $a_K \in \mathbb{R};\ k = 1, \ldots, n \quad |\sum_{k=1}^n a_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$

$$|x^n - l_a(x)| \leq |x-a| \left(|x^{n-1} - a^{n-1}| + |ax^{n-2} - a^{n-1}| + \cdots + |a^{n-2}x - a^{n-1}|\right)$$

Wir haben nun für $a, x \in [-R, R]$ die Steigungsungleichung:

$$\left|\frac{x^n - a^n}{x-a}\right| = |x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}| \leq nR^{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$|x^n - a^n| \leq |x-a| \cdot nR^{n-1} \tag{7.1}$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|x^n - l_a(x)| &\leq |x-a|\big[(n-1)|x-a|R^{n-2}\big] + \big[(n-2)|x-a|R^{n-3}\big] \\
&\quad + \cdots + |a^{n-2}| \cdot |x-a|] \\
&\leq (x-a)^2\Big((n-1)R^{n-2} + |a|(n-2)R^{n-3} + |a|^2(n-3)R^{n-4} \\
&\quad + \cdots + 1 \cdot |a^{n-2}|\Big) \qquad |a| \text{ kann durch R ersetzt werden} \\
&\leq (x-a)^2 \cdot R^{n-2}\big((n-1) + (n-2) + \cdots + 1)\big) \\
&\quad = (x-a)^2 R^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = (x-a)^2 \cdot R^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

Also

$$|x^n - l_a(x)| \leq K \cdot (x-a)^2 \quad \text{mit} \quad K = R^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\ . \tag{7.2}$$

Umformung von Ungleichungen

$|a-b| \leq c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq a-b \leq c \quad \Leftrightarrow \quad b-c \leq a \leq b+c$

Also kommt man von: $|x^n - l_a(x)| = K \cdot (x-a)^2$ auf:

$$\Leftrightarrow\ -K(x-a)^2 \leq\ x^n - l_a(x) \leq\ K(x-a)^2 \tag{7.3}$$

mit $l_a(x) = a^n + na^{n-1}(x-a)$. Also,

$$\begin{array}{rcccl} l_a(x) - K(x-a)^2 & \leq & x^n & \leq & l_a(x) + K(x-a)^2 \\ \underbrace{a^n + na^{n-1}(x-a) - K(x-a)^2}_{\text{quadratische Parabel; nach unten offen}} & \leq & x^n & \leq & \underbrace{a^n + na^{n-1}(x-a) + K(x-a)^2}_{\text{quadratische Parabel; nach oben offen}} \end{array}$$

Diese Ungleichung sagt:

1. Der Graph von $P : x \mapsto x^n$ liegt in dem Intervall $x \in [-R, R]$ zwischen zwei Parabeln mit gleicher Tangente $l_a(x)$.
2. Die Sehnensteigung von P in $[-R, R]$ weicht höchsten von der Zahl na^{n-1} (Steigung der Tangente $l_a(x)$) um $\frac{n(n-1)}{2} R^{n-2}|x-a|$ ab. – Also weicht sie um so weniger ab, je näher x bei a liegt.

Die Idee die Potenzfunktion mit quadratischen Funktionen zu vergleichen hat funktioniert und folgendes motiviert:

Definition 7.1. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x = a$ so gut diffrenzierbar wie ein Kreis (kurz: „differenzierbar“) mit Steigung (bei x=a) oder* ***Ableitung*** *$f'(a) = m$, falls gilt:*

Es gibt ein Intervall $[-R, R]$ und eine (von a und R abhängige) Konstante K, sodaß eine quadratische Abschätzung für den Unterschied zwischen Tangente und Funktion existiert:

$$x \in [-R, R] \quad \Longrightarrow \quad \Big| f(x) - \big(f(a) + m(x-a)\big)\Big| \leq\ K|x-a|^2 \tag{7.4}$$

oder gleichbedeutend mit Sehnensteigungen formuliert:

$$x \in [-R, R] \quad \Longrightarrow \quad \Big|\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - m\Big| \leq\ K|x-a|\ . \tag{7.5}$$

Mit dieser Definiton sind nur solche Funktionen differenzierbar, die von ihren Tangenten ebenso gut approximiert werden, wie es beim Kreis und bei der Parabel beobachtet wurde.

Später werden wir **wesentlich** kompliziertere Funktionen konstruieren, die mit einer etwas schwächeren Eigenschaft als „differenzierbar“ definiert werden.

Zunächst begegnen wir nur Funktionen, die von ihren Tangenten nicht stärker abweichen als die quadratische Parabel $x \mapsto x^2$.