Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 9 (Aufgaben 9.1 - 9.10) 20 Bonuspunkte

Abgabe in den Übungen am 6.1.2009

Aufgabe 9.1 (Vektoren austauschen)

a) Betrachte die Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} = 1e_1 + 3e_2 + 5e_3 \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = 3e_1 + 5e_2 + 7e_3$$

$$v_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = 3e_1 + 1e_2 - 1e_3 \quad , \quad v_4 = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3 \ ,$$

wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Warum sind die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear abhängig? (Ohne Rechnng!)

Tausche auf der rechten Seite sukzessiv e_i gegen v_i aus, um die linear Abhängigkeiten der Vektoren $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ zu bestimmen.

b) Betrachte die beiden Untervektorräume E_1, E_2 von $\mathbb{R}^3$, die definiert sind als

$$E_1 := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\}, \quad E_2 := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix} \right\}.$$

Gib Basen für E_1 und E_2 an und bestimme $\dim_{\mathbb{R}}(E_1)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(E_2)$.
Zeige: $E_1 = E_2$.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.2 (Spann und linear unabhängige Vektoren)

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in einem K-Vektorraum V und die Vektoren $w_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} v_k \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ $(a_{jk} \in K;\ j = 1, ..., n)$ seien ebenfalls linear unabhängig.

a) Sei $u \in V \setminus \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$. Zeige, dass $v_1, \ldots, v_k, u$ auch linear unabhängig sind.

b) Zeige, dass es ein i gibt mit $a_{i1} \neq 0$. Nach Umbenennung darf $a_{11} \neq 0$ angenommen werden. Berechne v_1 in Abhängigkeit von $w_1, v_2, \ldots, v_n$.

c) Zeige, dass die Vektoren $a_{11}w_2 - a_{21}w_1,\ a_{11}w_3 - a_{31}w_1, \ldots, a_{11}w_n - a_{n1}w_1$ linear unabhängig sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 9.3 (Monotoniesatz: Abweichung von der Sehne und 2. Ableitung)

In der Vorlesung wurde bewiesen: aus $f'' \geq 0$ folgt : f liegt oberhalb jeder Tangente.

Jetzt beweise analog:

aus $f'' \geq 0$ folgt : In jedem Intervall $[a,b]$ liegt f unterhalb der Sehne

$$S_{ab}(x) := \frac{f(a)\cdot(b-x)+f(b)\cdot(x-a)}{b-a} = x\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \ .$$

Also: $f(x) \leq S_{ab}(x)$.

(Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $h(x) := f(x) - S_{ab}(x)$ in den Intervallen $[x,b]$ und $[a,x]$.) (4 Punkte)

Aufgabe 9.4 (Monotonie und Wachstum)

Mit Hilfe der Wachstumsrate f'/f wurde in der Vorlesung gezeigt: $(1+x/n)^n$ ist monoton wachsend in n. Bestimme analog die Monotonie der Folge: $\{h_n(x)\}$ mit

$$h_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}\right)^n \quad \text{für} \quad x \geq 0 \ . \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 9.5 (Parabel berührend geschnitten)

Betrachte an einer Stelle $x = a \neq 0$ die Parabel $P(x) = x^2$ und bestimme zu jedem a (durch Wahl von x_m, y_m, r) den Halbkreis

$$h(x) = y_m - \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} \ ,$$

der $h(a) = P(a)$, $h'(a) = P'(a)$, $h''(a) = P''(a)$ erfüllt. (Natürlich können hier die Differentiationsregeln und $\sqrt{x}\,' = 1/(2\sqrt{x})$ benützt werden). Dieser Halbkreis berührt also die Parabel.

Zeige, dass für $a \neq 0$ der Kreis die Parabel durchquert, d.h., dass $P - h$ bei $x = a$ das Vorzeichen wechselt. Setze dazu die Parabelpunkte (x, x^2) in die Kreisgleichung ein und klammere möglichst viele $(x-a)$ Faktoren aus. Was passiert bei $a = 0$?

(4 Punkte)

Aufgabe 9.6 (Schmiegparabeln schneiden)

Sei $P(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \geq 3$. Betrachte die *Schmiegparabel* an der Stelle $x{=}a$ gegeben durch

$$s_a(x) := P(a) + P'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}P''(a)\cdot(x-a)^2 \ .$$

Bemerke, dass $s_a(a) = P(a)$, $s_a'(a) = P'(a)$, $s_a''(a) = P''(a)$ gilt. Setze $P'''(a) \neq 0$ voraus und zeige, dass es ein Polynom $Q_a(x)$ gibt, das die Gleichung

$$P(x) - s_a(x) = (x-a)^3 \cdot Q_a(x)$$

erfüllt. Verifiziere: $Q_a(a) \neq 0$. Folgere, dass jede solche Schmiegparabel den Graph von P berührt und durchquert. Präzisiere die Aussage: Im allgemeinen (falls $P''(a) \neq 0$) wird P *besser* von der Schmiegparabel berührt als von der Tangente.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.7 (Taylorapproximation)

a) Es sei $a \in \mathbb{Q}$ fest vorgegeben. Ferner seien $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$.
Zeige, dass es *genau ein* Polynom $Q(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit

$$Q(a) = c_0 \quad , \quad Q'(a) = c_1 \quad , \ldots , \quad Q^{(n)}(a) = c_n \ .$$

Es folgt, dass für jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ und jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein eindeutiges Polynom $t_{n,a}(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit

$$t_{n,a}(a) = P(a) \ , \quad t'_{n,a}(a) = P'(a) \quad , \ldots , \quad t^{(n)}_{n,a}(a) = P^{(n)}(a) \ .$$

Das Polynom $t_{n,a}(X)$ ist das *Taylorpolynom zu P vom Grad n bei x=a.*
Speziell ist die Tangente das Taylorpolynom $t_{1,a}(X)$ vom Grad 1.

b) Zeige, dass die beiden Polynome $t_{n,a}(X)$ und $P(X)$ (vgl. Aufgabe 8.5) bezüglich der Basis $\{(X-a)^j \ , j = 0, \ldots, n\}$ die gleichen Koeffizienten haben.

c) Zeige, dass es Konstanten $K, c \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass für alle $x \in (a - c \, , \, a + c)$ gilt

$$|P(x) - t_{k,a}(x)| \leq K|x-a|^{k+1}$$

Hinweis: Für $k \geq n$ ist nichts zu zeigen, für $k < n$ faktorisiere $|x-a|^{k+1}$ heraus und benutze die Dreiecksungleichung.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.8 (Polynome und Polynomfunktionen mod 7)

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_7)$ der Vektorraum aller Abbildungen $\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$ (Vorlesung: Die Menge aller Abbildungen von irgendeiner Menge M in einen Vektorraum V ist selbst ein Vektorraum). Jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{F}_7[X]$ liefert eine Abbildung $\mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$, indem $x \in \mathbb{F}_7$ nach $P(x) \in \mathbb{F}_7$ abgebildet wird. So haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathbb{F}_7[X] &\to \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_7, \mathbb{F}_7) \\ P(X) &\mapsto L(P) := (x \mapsto P(x)) \end{aligned}$$

a) Zeige, dass L eine lineare Abbildung ist.

b) Zeige, dass L surjektiv ist. (Bemerke den Unterschied zum üblichen Fall rationaler Koeffizienten: Jeder "*weiß*", dass es andere Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt als Polynome).

c) Zeige, dass L injektiv ist, wenn man L auf den Untervektorraum aller Polynome in $\mathbb{F}_7[X]$ mit Grad kleiner oder gleich 6 einschränkt. (Überladene Bezeichnung: $(\mathbb{F}_7)_6[X]$.)

d) Rechne nach, dass in $\mathbb{F}_7[X]$ gilt:

$$X^7 - X = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)$$

und folgere daraus, dass $L(X^7 - X) = 0$, was auch ganz anders ist, als bei den Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 9.9 (Erzeugendensysteme)

Begründe, welche der nachfolgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, und welche Erzeugendensysteme von $\mathbb{R}^3$ sind.

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$

(4 Punkte)

Aufgabe 9.10 (Multiplikation nicht immer assoziativ)

Zeige, dass die Menge $\mathbb{H} := \{\pm 1, \pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ mit Multiplikation $*\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
1 * 1 &= 1 \quad , \quad (-1)*(-1) = 1 \quad , \quad 1*(-1) = (-1)*1 = (-1) \\
e_i * e_i &= -1 \quad , \quad 1 * e_i = e_i * 1 = e_i \quad , \quad -e_i = (-1)*e_i = e_i*(-1) \quad , \quad i = 1,2,3 \\
e_1 * e_2 &= -e_2 * e_1 = e_3 \\
e_2 * e_3 &= -e_3 * e_2 = e_1 \\
e_3 * e_1 &= -e_1 * e_3 = e_2
\end{aligned}$$

eine Gruppe bildet, unter der Annahme, dass Multiplikation mit ± 1 assoziativ ist. (Hinweis: die Multiplikationsregeln sind symmetrisch unter zyklischen Permutationen der Indizes 1,2,3; es gilt nämlich

$$e_1 * e_2 = -e_2 * e_1 = e_3 \quad \text{und alle zyklische Permutationen von} \quad (1,2,3)\ .$$

So muß die Assoziativität von nur wenigen Tripeln (e_i, e_j, e_k) nachgeprüft werden).

Nun zeige, dass die erweiterte Menge $\mathbb{O} := \{\pm 1\,, \pm e_1\,, \pm e_2\,, \pm e_3\,, \pm e_4\,, \pm e_5\,, \pm e_6\,, \pm e_7\}$ mit folgender Multiplikationstabelle *keine* Gruppe bildet:

	1	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
-1	-1	1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	$-e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$
e_1	e_1	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_2$	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_3	e_3	$-e_3$	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_4	e_4	$-e_4$	$-e_5$	e_6	e_7	-1	e_1	$-e_2$	$-e_3$
e_5	e_5	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	$-e_2$
e_6	e_6	$-e_6$	e_7	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_7$	$-e_6$	$-e_5$	$-e_4$	$-e_3$	e_2	e_1	-1

Nehme wieder an, dass Multiplikation mit ± 1 assoziativ ist.

Für das Versagen der Assoziativität reicht es zu zeigen, dass es *ein* Tripel gibt, für welches $e_i * (e_j * e_k) \neq (e_i * e_j) * e_k$.

(6 Punkte)