Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 8 (Aufgaben 8.1 - 8.6)

Abgabe in den Übungen am 16.12.2008

Aufgabe 8.1 (Binomialkoeffizienten und Induktion)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le k \le n$ sind

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \,, \tag{1}$$

die Binomialkoeffizienten.
Hierbei ist $n!$ induktiv durch $0! := 1$ und $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$ definiert.
Zeige, dass mit den Anfangswerten $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ die folgenden Rekursionsformeln gelten:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} \cdot k = \binom{n}{k-1} \cdot (n+1-k)$$

Gib nun umgekehrt mit jeder dieser Rekursionsformeln einen Induktionsbeweis für (1) an.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.2 (Basen von $\mathbb{Q}_3[X]$)

Begründe kurz, welche der folgenden Mengen eine Basis, ein Erzeugendensystem oder linear unabhängig in $\mathbb{Q}_3[X]$ sind (dies kann *wirklich* ohne Gleichungssysteme beantwortet werden):

a) $\{1\,,\ X-1\,, X^2-5X\,,\ 17X^3+273X^2+101\}$

b) $\{X(X-1)(X-2)\,,\ X(X-1)(X-3)\,,\ 56X(X-1)(X-5)\}$

c) $\{X(X-1)(X-2)\,,\ X(X-1)(X-3)\,,\ X(X-2)(X-3)\,,\ (X-1)(X-2)(X-3)\}$

d) $\{X^3\,,\ X^3-X^2\,,\ X^3-5X^2+37X\,,\ X^3-400X^2+1\,,\ 1\}$

e) Die Menge $\mathbb{Q}_2[X]$

f) $\{1\,,\ X\,,\ X^2\}$ (Bemerke: dies ist eine Basis, aber von $\mathbb{Q}_2[X]$)

g) $\{1\,,\ X\,,\ 456X^3+345X^2+187X+471\}$

h) $\{1\,,\ 1+X\,,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2\,,\ 1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3\}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 8.3 (Ungleichungen und Monotonie)

a) Zeige unter der Voraussetzung $0 \le a, b$, dass $a < b$ genau dann gilt, wenn $a^3 < b^3$.

b) Zeige, dass die Funktion $x \mapsto x^3$ monoton wachsend ist.

c) Zeige hingegen, dass die Funktion $x \mapsto x^4$ *nicht* monoton wachsend ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 8.4 (Polynomfaktorisierungen)

a) Beweise mittels Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}$:

$$X^n - a^n = (X-a) \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-k-1} a^k \ .$$

$\Big($Hinweis: Verwende $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} b_k := b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} b_k\Big)$.

b) Zeige unter Verwendung von a), dass sich für jedes Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ und für jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein $Q_a \in \mathbb{Q}[X]$ finden läßt, für das gilt:

$$P(X) - P(a) = (X-a) Q_a(X) \ .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 8.5 (Polynome in der Basis $\{\mathbf{1}, (\mathbf{X}-\mathbf{a}), \ldots, (\mathbf{X}-\mathbf{a})^{\mathbf{n}}\}$)

Es sei $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt.

a) Zeige mittels linearer Abbildungen (Differenzieren und Auswerten an der Stelle $X{=}a$), dass $\{1,\ (X-a),\ \ldots,\ (X-a)^n\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}_n[X]$ ist, und sich somit jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ als Linearkombination dieser Basisvektoren schreiben läßt. Das heißt, es gibt Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{j=0}^{n} b_j (X-a)^j \ .$$

b) Gib einen expliziten Algorithmus für die Berechnung der Koordinaten b_j bezüglich der Basis $\{(X-a)^j\ , j = 0, \ldots, n\}$ aus dem Koordinaten a_k bezüglich der Basis $\{X^k\ , k = 0, \ldots, n\}$ an.
(Hinweis: Benutze die Binomische Formel für $((X-a)+a)^k$).

(4 Punkte)

Aufgabe 8.6 (Ableitung rationaler Funktionen)

Sei

$$f(x) := \frac{1 + ax + bx^2}{1 - (1-a)x} \ .$$

a) Differenziere f zweimal und bestimme a, b, so dass

$$f(0) = f'(0) = f''(0) \ \text{ und } \ f'(1) = f(1) \ \text{ gilt.}$$

b) Zeige, dass für die $a{>}0$ Lösung im Intervall $0 \le x \le 1$ gilt: $f'(x)/f(x) \le 1$.

c) Vergleiche numerisch $f(x), f(x/2)^2$ und e^x auf $[0,1]$ (ohne Punkte).

(3 Punkte)