Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 7 (Aufgaben 7.1 - 7.7)

Abgabe in den Übungen am 9.12.2008

Aufgabe 7.1 (Geometrische Reihe und Induktion)

Die Summenformel der geometrischen Reihe ist Grundwissen: Für $x \neq 1$ gilt:

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x} \ .$$

a) Differenziere diese Formel und zitiere die benutzten Regeln.

b) Beweise die in a) erhaltene Formel erneut, jetzt durch Induktion.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.2 (Polynomdivision)

a) Bestimme Polynome $P \in \mathbb{Q}[X]$ (vom Grade ?), damit:

i) $X^4 - a^4 - 4a^3(X - a) = (X - a)^2 \cdot P(X)$ mit $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt

ii) $X^7 - 3X^6 + 2X^5 - 3X^3 + 10X^2 - 9X + 2 = (X^2 - 3X + 2) \cdot P(X)$

iii) $X^n - 1 = (X - 1) \cdot P(X)$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

b) Rechne $Q, R \in \mathbb{F}_7[X]$ aus, so dass

$$F(X) := X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 2X + 1 \ = \ (X + 6) \cdot Q \ + \ R \ .$$

Prüfe nach, dass $R = W_1(F) := F(1)$, dem Wert des Polynoms F an der Stelle $1 \in \mathbb{F}_7$, und erkläre diese Gleichheit.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.3 (Polynome)

a) Zeige, ohne Benutzung der Polynomdivision, dass es keine Polynome $P(X), Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, sodass

i) $X^5 + 5X^2 + 2 = (X - 1)P(X)$

ii) $X^6 - 3X^5 + 2X^3 - 3X^2 + 7X - 7 = (X - 1)^2 Q(X)$.

b) Betrachte $R(X) := X^5 - 4X^4 + 8X^3 - 10X^2 + 7X - 2$.

Was ist die Vielfachheit der Nullstelle X=1? Wie viele Nullstellen besitzt $R(X)$?

(2 Punkte)

Aufgabe 7.4 (Tangenten, nicht immer auf einer Seite)

Betrachte die Polynomfunktion $f(x) = x^3 - x$.

a) Bestimme die Gleichung für die Tangente $l_a(x)$ im Punkt $(a, a^3 - a)$.

b) Zeige, dass für alle $a \neq 0$ die Tangente den Graphen an einer weiteren Stelle $b\,(\neq a)$ schneidet. (Tip: Beachte die Nullstellen der Polynomfunktion $P_a(x) := f(x) - l_a(x)$.)

(3 Punkte)

Aufgabe 7.5 (Lineare Unabhängigkeit und lineare Abbildungen)

a) Zeige, dass die rationalen Funktionen

$$f_1(x) = \frac{4711}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{6783}{x-2}, \quad f_3(x) = \frac{5/9}{x-3}$$

linear unabhängig sind. Bearbeitung mittels eines 3×3–Gleichungssystems gilt als Notlösung. Beachte, dass falls die Bilder einer linearen Abbildung eines Vektorraumes $\{L(v_1), \ldots, L(v_k)\}$ linear unabhängig sind, so sind auch die Urbilder $\{v_1, \ldots, v_k\}$ stets linear unabhängig.

b) Bestimme $A, B, C \in \mathbb{Q}$ so dass

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = A\frac{4711}{x-1} + B\frac{6783}{x-2} + C\frac{5/9}{x-3}$$

und zeige mit a) die Eindeutigkeit dieser Lösung.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.6 (Kleiner Satz von Fermat)

Berechne mit Hilfe der Multiplikationstabelle von Aufgabe 3.4:

$$a^6 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{F}_7 \,.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 7.7 (Definitionen)

Keine Abgabe, aber eine wichtige Übung: Inzwischen müssten die grundlegenden Definitionen längst verinnerlicht sein.

Schreibe in Schönschrift, aus dem Gedächtnis, die Definitionen von **Gruppe, Körper, Vektorraum, lineare Abbildung, injektv, surjektiv, bijektiv, linear abhängig, linear unabhängig** und **Basis** auf.

Nun korrigiere die Definitionen selbst und hänge das Blatt auf, wo es mindestens zweimal am Tag gelesen wird (z.B. gegenüber vom Klo!).

Wiederhole die Übung jeden Tag, bis alle Definitionen ohne Fehler wiedergegeben werden können.