Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 6 (Aufgaben 6.1 - 6.6)

Abgabe in den Übungen am 2.12.2008

Aufgabe 6.1 (K-Vektorräume)

Betrachte die Indexmenge $M = \{1, \ldots, n\}$ und einen Körper K. Zeige: die Produktmenge

$$V = K^n = \left\{ \begin{array}{rcl} v : M & \to & K \\ i & \mapsto & v_i \end{array} \right\}$$

mit einer Addition und einer skalaren Multiplikation ist ein K-Vektorraum.

(2 Punkte)

Aufgabe 6.2 (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear (warum oder warum nicht)?

a) $F_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto 3x$

b) $F_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto 3x + 2$

c) $F_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad x \mapsto x^2$

d) $F_4 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X], \qquad P(X) \mapsto P(X) + X^2 + 3X$

e) $F_5 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X], \qquad P(X) \mapsto (3X + 2)P(X)$

f) $F_6 : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X], \qquad P(X) \mapsto P(X + 1)$

(2 Punkte)

Aufgabe 6.3 (Linear abhängig, linear unabhängig)

a) Betrachte die Polynome

$$P_1(X) := X - 1 \quad , \quad P_2(X) := X - 2 \quad , \quad P_3(X) := X - 3 \ .$$

Zeige, dass je zwei von diesen linear unabhängig, aber alle drei linear abhängig sind. (Koeffzienten in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$)

b) Betrachte $\mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und überprüfe folgende Systeme von Vektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit:

i) $(1, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, -3, 2)$

ii) $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$

iii) $(9, 1, 5)$, $(17, 11, 14)$, $(18, 2, 10)$

iv) $(1, 9, 7)$, $(2, 3, 4)$, $(9, 7, 6)$, (6,6,6) .

(4 Punkte)

Aufgabe 6.4 (Lagrange Interpolation)

Sind die folgenden kubischen Polynome aus $\mathbb{Q}_3[X]$ linear abhängig?

$$P_1(X) = \frac{(X-2)(X-3)(X-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \quad , \quad P_2(X) = \frac{(X-1)(X-3)(X-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$P_3(X) = \frac{(X-1)(X-2)(X-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \quad , \quad P_4(X) = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \ .$$

(Beantwortung mittels eines Gleichungssystems gilt als Notlösung).

Finde eine Linearkombination $Q(X) = \sum_{i=1}^{4} a_i P_i(X)$, die an den vier Stellen $X = 1, 2, 3, 4$ den Wert $\frac{315}{19}$ hat. (3 Punkte)

Aufgabe 6.5 („beste lineare Approximation")

Zeige, dass für Polynomfunktionen 3. Grades $Q(x) := b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ gilt:

Für alle $a, x \in [-R, R]$ (a und R Konstanten) erfüllt die Abweichung der Polynome $Q(x)$ von den linearen Funktionen $L_a(x) = Q(a) + Q'(a) \cdot (x - a)$, die bei $x = a$ denselben Wert und dieselbe Steigung wie Q haben, für eine geeignete Konstante $K > 0$ die Ungleichung

$$|Q(x) - L_a(x)| \leq K(x-a)^2 \ .$$

Diese Ungleichung sagt uns wie gut die Polynome Q durch die Funktionen L_a approximiert werden.

Hinweis: Benutze (s. Vorlesung), dass für die Abweichung der einzelnen Potenzen von ihren Tangenten an der Stelle a gilt:

$$a, x \in [-R, R] \quad \Longrightarrow \quad |x^k - a^k - k a^{k-1}(x-a)| \leq \tfrac{1}{2} k(k-1) R^{k-2} (x-a)^2 \ .$$

(5 Punkte)

Aufgabe 6.6 (Symmetrische Gruppe)

Betrachte die Menge der Abbildungen $M := \{\mathrm{id}, F_1, F_2, F_3, G_1, G_2\}$ definiert in Aufgabe 2.4:

$$F_1 := 1 - x \quad , \quad F_2 := \frac{1}{x} \quad , \quad F_3 := \frac{x}{x-1} \quad , \quad G_1 := \frac{x-1}{x} \quad , \quad G_2 := \frac{1}{1-x} \ .$$

In Aufgabe 2.4 wurde gezeigt, dass $F_1 \circ F_1 = F_2 \circ F_2 = \mathrm{id}$. Nun zeige, dass ebenfalls $F_3 \circ F_3 = \mathrm{id}$ und weiterhin, dass $G_1 \circ G_1 \circ G_1 = G_2 \circ G_2 \circ G_2 = \mathrm{id}$. Was sind die Umkehrfunktionen G_1^{-1}, G_2^{-1} ?

Zeige, dass $(M, \circ)$ eine Gruppe ist. Bestimme die Multiplikationstabelle bezüglich der Komposition der Abbildungen. Vergleiche diese Tabelle mit der Multiplikationstabelle der Gruppe S_3 aus Aufgabe 4.3.

(4 Punkte)