Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

# Mathematik für Physiker IV
## SoSe 2010 Blatt 51 (Aufgabe 51.1 - 51.3)

(keine Abgabe, aber klausurrelevant)

---

### Aufgabe 51.1 (Höhere Ableitungen der Delta-Funktion)

a) Zeige für $x \in \mathbb{R}$, dass:

$$x^j\,\delta^{(k)}(x) \quad = \quad \begin{cases} (-1)^j k\,(k-1)\ldots(k-j+1)\;\delta^{(k-j)}(x) & \text{falls } j \le k\,, \\ 0 & \text{falls } j > k\,, \end{cases} \tag{1}$$

$$g(x)\,\delta^{(k)}(x) \quad = \quad \sum_0^k (-1)^j \frac{k!}{j!(k-j)!}\; g^{(j)}(0)\,\delta^{(k-j)}(x)\,; \quad g \in C^\infty\,. \tag{2}$$

b) Zeige für $x \in \mathbb{R}^n$, dass: $|x|^2\,\nabla^2\,\delta(x) = 2n\delta(x)\,.$

### Aufgabe 51.2 (Periodische Distributionen)

Sei

$$\chi(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{|x|}^{2\pi} e^{-1/t(2\pi-t)}dt \Bigg/ \int_0^{2\pi} e^{-1/t(2\pi-t)}dt & \text{für } |x| < 2\pi\,, \\ 0 & \text{für } |x| \ge 2\pi\,, \end{cases}$$

Zeige, dass:

a) $\chi \in C_0^\infty\,,\quad \operatorname{supp}(\chi) = [-2\pi, 2\pi]\,,\quad \chi(x) + \chi(x-2\pi) = 1$ für $0 \le x \le 2\pi$
und (äquivalent) $\chi(x) + \chi(x+2\pi) = 1$ für $-2\pi \le x \le 0\,,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\chi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ falls $f$ stetig und $2\pi$-periodisch ist,

c) falls $F$ eine $2\pi$-periodische Distribution mit der Fourier-Reihe $\sum c_n e^{inx}$ ist,
dann ist $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\,F\left[\chi(x)e^{-inx}\right]\,.$

**Aufgabe 51.3 (Distributionelle Fouriertransformierte)**

Seien $f, g$ $2\pi$-periodische Funktionen definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 && \text{für} \quad -\pi \leq x \leq \pi \\ g(x) &= x && \text{für} \quad -\pi < x < \pi\ . \end{aligned}$$

Zeige:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \widehat{f}(k) = \frac{2\pi^3}{3}\,\delta(k) + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,\left[\delta(k-n) + \delta(k+n)\right], \\ \mathcal{F}\{g(x)\} &= \widehat{g}(k) = 2\pi i\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\left[\delta(k+n) - \delta(k-n)\right]. \end{aligned}$$

Skizziere die Graphen von $f(x), \widehat{f}(k), g(x), \widehat{g}(k)$.