Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker IV
SoSe 2010 Blatt 50 (Aufgabe 50.1 - 50.4)

Abgabe in den Übungen: 15.07.2010

Aufgabe 50.1 (Laplace-Transformation perioidscher Funktionen)

Sei f eine α-periodische Funktion, das heißt $f(t+\alpha) = f(t)$ für $t > 0$. Zeige, dass:

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{F(z)}{1 - e^{-\alpha z}} \quad \text{wobei} \quad F(z) = \int_0^\alpha f(t) e^{-zt}\, dt\,.$$

Nun berechne mit diesem Ergebnis die Laplace-Transformierten der 2π-periodischen Funktionen, die im Intervall $(0, 2\pi)$ wie folgt gegeben sind:

a) $$f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 < t < \pi \\ t - 2\pi & , \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$ (Sägezahnschwingung),

b) $$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < \pi \\ -1 & , \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$ (Rechteckschwingung),

c) $$f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 < t < \pi \\ 2\pi - t & , \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$$ (Dreieckschwingung).

[Lösungen : *a)* $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{\pi}{z \sinh \pi z}$, *b)* $\dfrac{1}{z} \tanh \dfrac{\pi z}{2}$, *c)* $\dfrac{1}{z^2} \tanh \dfrac{\pi z}{2}$] (4 Punkte)

Aufgabe 50.2 (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

Benutze Laplace-Transformationen, um folgende Differentialgleichungen zu lösen:

a) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}\,, \quad y(0) = -3\,, \quad y'(0) = 5\,,$

b) $y'' + 9y = \cos 2t\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y(\pi/2) = -1\,,$

c) $y'' + 4y = H(t-2)\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,,$

d) $y' + y = \delta(t-a)\,, \quad y(0) = 1\,, \quad a > 0\,,$

e) $t\, y'' + (1-2t)\, y' - 2y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,,$

f) $y'' + y' - 2y = f(t)$ (6 Punkte)

[Lösungen: *a)* $y = -7e^t + 4\,(1+t)\,e^{2t}$, *b)* $y = \frac{1}{5}\,(4\cos 3t + 4\sin 3t + \cos 2t)$,
c) $y = \sin 2t + \cos 2t + \frac{1}{4}\big\{1 - \cos 2(t-2)\big\} H(t-2)$, *d)* $y = e^{-t} + e^{a-t} H(t-a)$
e) $y = e^{2t}$, *f)* $y = Ae^{-2t} + Be^t + \frac{1}{3}\int_0^t f(t-u)(e^u - e^{-2u})\, du$]

Aufgabe 50.3 (Integralgleichung)

Zeige: Falls y die Integralgleichung $\quad y(t) = f(t) + \int_0^t g(t-u)\,y(u)\,du \quad$ erfüllt, dann ist die Laplace-Transformierte von y gegeben durch:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{1 - \mathcal{L}\{g(t)\}} \ .$$

Nun löse die Integralgleichung:

$$y(t) = \sin 3t + \int_0^t \sin(t-u)\,y(u)\ du \ .$$

[Lösung: $y(t) = \frac{t}{3} + \frac{8}{9}\sin 3t$]

(4 Punkte)

Aufgabe 50.4 (Wärmeleitungsgleichung IV)

Betrachte die Wärmeleitung in einem halbunendlichen Stab, an dessen Ende die Wärme konstant zugeführt wird:

$$u_t = k u_{xx} \ \text{ für } \ x > 0\,, \quad u(x,0) = 0\,, \quad u_x(0,t) = -c\,, \quad c = \text{konst.}$$

Zeige mit Hilfe der Formel $\quad \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\ e^{-a^2/4t}\right] = \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$, dass

$$u(x,t) = c\sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_0^t s^{-1/2}\, e^{-x^2/4ks}\, ds\,.$$

Zeige durch die Substitution $\sigma = x/\sqrt{4ks}$ und partielle Integration, dass

$$u(x,t) = c\sqrt{\frac{4kt}{\pi}} e^{-x^2/4kt} - cx\,\text{erfc}\,\frac{x}{\sqrt{4kt}}\,.$$

(6 Punkte)