Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 5 (Aufgaben 5.1 - 5.5)

Abgabe in den Übungen am 25.11.2008

Aufgabe 5.1 (Rechnen mit Ungleichungen)

Zeige, dass die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ (also der Graph der Funktion $x \mapsto x^2$) keine gemeinsamen Punkte mit der Kreisscheibe vom Radius 6/7 um $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

(3 Punkte)

Aufgabe 5.2 (Tangenten)

Betrachte den Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ für $x > 0$. Bestimme die Tangente an der Stelle $x = a$ durch Betrachtung der Sehnensteigung um den Punkt $x = a$. Zeige, dass der Graph von $f(x)$ oberhalb dieser Tangente liegt. Zeige, dass für $x \in [\frac{a}{2}, 2a]$ die Abweichung der Tangente vom Graph der Funktion für eine gewisse Konstante K die Ungleichung $K \cdot (x - a)^2 \geq 0$ erfüllt. Bestimme die Konstante K.

(5 Punkte)

Aufgabe 5.3 (Beispiel zu „wie gut approximiert")

Betrachte die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$.

a) Wie lautet die Gleichung für die Tangente $l_a(x)$, die den Graph von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ berührt?

b) Die Tangente $l_a(x)$ liefert eine Approximation für $\sqrt{x}$. Mit $a = 100$ berechne die Tangentenapproximation für $\sqrt{100.742}$.

c) Zeige, dass die Abweichung der Funktion $f(x)$ von ihrer Tangente an der Stelle a, $\mathrm{Abw}_f(x) := f(x) - l_a(x) \leq 0$ ist. Damit ist die in b) erhaltene Abschätzung für $\sqrt{100.742}$ offenbar zu gross.

d) Zeige, dass für $x \geq a$ die folgende quadratische Fehlerschranke existiert:

$$\mathrm{Abw}_f(x) \geq \frac{-(x-a)^2}{8a^{3/2}} \; .$$

Also ist die Abschätzung für $\sqrt{100.742}$ zwar zu gross, aber höchstens um $(0.742)^2/8000$.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.4 (Körperaxiome)

Läßt sich mit den Zahlenpaaren (a, b), $a, b \in \mathbb{Q}$, so rechnen, dass die Körperaxiome erfüllt sind?
Zeige, dass mit der Addition der "Komponenten", $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, eine kommutative Gruppe gegeben ist.
Versuche zunächst die Multiplication durch $(a, b) * (c, d) := (ac, bd)$ zu definieren.
Welches Körperaxiom ist dann nicht zu erfüllen?
Was ändert sich wenn (a, b) als $(a+b\sqrt{2})$ umgedeutet wird? Zeige, dass dann einen Körper gegeben ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 5.5 (Rechnen mit Kongruenzen)

Kongruenzklassen modulo 7 lassen sich addieren und multiplizieren. Sei $\mathbb{F}_7$ die Menge aller Kongruenzklassen modulo 7, repräsentiert durch $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Zeige mit Hilfe der Multiplikationstabelle von Aufgabe 3.4, dass $\mathbb{F}_7$ ein Körper ist.

b) Zeige möglichst einfach, dass $\mathbb{F}_4$ (die Menge der Kongruenzklassen modulo 4) kein Körper ist.

c) Sei ab jetzt $\mathbb{F}_7[X]$ die Menge aller Polynome mit Koeffzienten in $\mathbb{F}_7$. Man kann solche Polynome koeffzientenweise addieren, also

$$\begin{aligned} & (3X + 5) \bmod 7 + (4X^2 + 4X + 2) \bmod 7 \\ \equiv\ & 4X^2 \bmod 7 + ((3 + 4)X) \bmod 7 + (5 + 2) \bmod 7 \\ \equiv\ & 4X^2 \bmod 7\ . \end{aligned}$$

Man kann auch mit einem Element von $\mathbb{F}_7$ multiplizieren, also

$$(4 \bmod 7) \cdot ((3X + 1) \bmod 7) \equiv (12X + 4) \bmod 7 \equiv (5X + 4) \bmod 7\ .$$

Zeige, dass $\mathbb{F}_7[X]$ mit diesen Rechenregeln zu einem $\mathbb{F}_7$–Vektorraum wird. Schreibe den Beweis so auf, dass nur benutzt wird, dass $\mathbb{F}_7$ die Körperaxiome erfüllt.

d) Warum hat ein quadratisches Polynom $P \in \mathbb{F}_7[X]$, $P \neq 0$, höchstens zwei Nullstellen?

(4 Punkte)