Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker IV
SoSe 2010 Blatt 49 (Aufgabe 49.1 - 49.2)

Abgabe in den Übungen: 1.07.2010

Aufgabe 49.1 (Poisson-Kern)

a) In Aufgabe 38.1 wurde gezeigt, dass:
$$\mathcal{F}[(x^2+a^2)^{-1}] = \frac{\pi}{a}\, e^{-a|k|}\,. \tag{1}$$
Sei $f_a(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$, $\quad a > 0\,.$
Benutze die Fouriertransformation, um zu zeigen, dass: $f_a * f_b = f_{a+b}\,.$

b) Kombiniere die Formel $(t^2+1)^{-1} = \int_0^\infty e^{-(t^2+1)s} ds$ mit Gl.(1), um zu folgern dass:
$$e^{-b} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ibt}}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty e^{-ibt}\, e^{-t^2 s}\, e^{-s}\, ds\, dt\ , \quad b > 0\,.$$
Vertausche die Integrale und fouriertransformiere die Gaußfunktion, um die folgende Gleichung zu erhalten:
$$e^{-b} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\, e^{-b^2/4s}\, ds\ , \quad b > 0\,. \tag{2}$$

c) Betrachte das Dirichlet-Problem in einem Halbraum
$$H = \{(x_1,\ldots,x_{n+1})\ :\ x_{n+1} > 0\} =: \{(\mathbf{x},y)\ :\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\ , y > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,,$$
$$\nabla^2 u = \nabla^2_{\mathbf{x}} u + u_{yy} = 0 \quad \text{in} \quad H\ , \quad u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x})\ .$$
Fouriertransformiere in $\mathbf{x}$, um zu zeigen, dass $\widehat{u}(\mathbf{k},t) = \widehat{f}(\mathbf{k})e^{-|\mathbf{k}|y}$, $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^n$, unter Forderung der Beschränktheit. Also $u(\mathbf{x},y) = f * P_y(\mathbf{x})$, wobei $\widehat{P}_y(\mathbf{k}) = e^{-|\mathbf{k}|y}$ ist. In dem eindimensionalen Fall wurde die inverse Fouriertransformierte in Aufgabe 38.1 schon berechnet. Nun zeige, dass in dem n-dimensionalen Fall,
$$P_y(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-y|\mathbf{k}|}\, d\mathbf{k} = \frac{\Gamma\big((n+1)/2\big)}{\pi^{(n+1)/2}}\ \frac{y}{\big(|\mathbf{x}|^2+y^2\big)^{(n+1)/2}}\ . \tag{3}$$
[Hinweis: Setze das Integral aus (2) in die linke Seite von (3) ein mit $b = y|\mathbf{k}|$, vertausche die Integrale und wende die Formel für die Fouriertransformierte der Gaußfunktion an.]

(10 Punkte)

Aufgabe 49.2 (Laplace-Transformation)

Berechne die folgenden Laplace-Transformierten
(a und c sind Konstante mit $a > 0$ und $c \in \mathbb{C}$):

a) $\mathcal{L}[\cosh ct] = \dfrac{z}{z^2 - c^2}$,

b) $\mathcal{L}[te^{at}] = \dfrac{1}{(z-a)^2}$,

c) $\mathcal{L}[t^{-\frac{1}{2}}] = \sqrt{\dfrac{\pi}{z}}$, $\quad \mathcal{L}[t^{\frac{3}{2}}] = \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{\pi}{z^5}}$, $\quad$ [Beachte: $\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$] ,

d) $\mathcal{L}\left[\sin ct\right] = \dfrac{c}{z^2 + c^2}$, $\quad \mathcal{L}\left[t^{-1}\sin t\right] = \arctan \dfrac{1}{z}$,

e) $\mathcal{L}\left[\cos ct\right] = \dfrac{z}{z^2 + c^2}$, $\quad \mathcal{L}[e^t \cos 2t] = \dfrac{z-1}{z^2 - 2z + 5}$,

f) $\mathcal{L}[te^{-2t}\sin t] = \dfrac{2z+4}{(z^2+4z+5)^2}$,

g) $\mathcal{L}[J_0(at)] = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}$, $\quad J_0(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$,

h) $\mathcal{L}[(t+a)^{-1}] = e^{az}E_1(az)$, $\quad E_1(t) := \displaystyle\int_t^\infty \frac{e^{-s}}{s}\, ds$,

i) $\mathcal{L}[e^{-a^2t^2}] = (\sqrt{\pi}/2a)\; e^{z^2/4a^2}\,\mathrm{erfc}(z/2a)$, $\quad \mathrm{erfc}(t) := 1 - \mathrm{erf}(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_t^\infty e^{-s^2} ds$,

j) $\mathcal{L}[\mathrm{erf}\, at] = \dfrac{e^{z^2/4a^2}}{z}\,\mathrm{erfc}\left(\dfrac{z}{2a}\right)$, $\quad \mathrm{erf}(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t e^{-s^2} ds$.

(10 Punkte)