Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker IV
SoSe 2010 Blatt 48 (Aufgabe 48.1 - 48.4)

Abgabe in den Übungen: 17.06.2010

Aufgabe 48.1 (Hermite-Funktion)

Seien H_n die Hermite-Polynome $H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} \, e^{-x^2}$ (s. Aufgabe 43.3). Zeige:

a) $h_n(x) := e^{-x^2/2} H_n(x) = \left(x - \dfrac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$

b) Die Hermite-Funktionen $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ bilden eine orthogonale Basis für $L^2(\mathbb{R})$ (mit der Gewichtsfunktion 1) und erfüllen die Rekursionsrelationen:

$$x h_n(x) + h_n'(x) = 2n \, h_{n-1}(x) \tag{1}$$

$$x h_n(x) - h_n'(x) = h_{n+1}(x) \tag{2}$$

c) $\mathcal{F}[h_n(x)] =: \widehat{h}_n(k) = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n(k)$

[Tipp: Benutze die Induktion über n. Für h_0 ist das Ergebnis bekannt! Prüfe den Induktionsschritt unter Anwendung der Fouriertransformation von Gl.(2) nach.]

Die h_n bilden eine orthogonale Basis der Eigenfunktionen der Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, also sie diagonalisieren den Operator der Fouriertransformation.

(6 Punkte)

Aufgabe 48.2 (Wärmeleitungsgleichung III)

Benutze die Fourier-Sinustransformation, um die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad \text{für} \quad x > 0, \; t > 0$$

unter folgenden Bedingungen:
$u(0,t) = 1$ für $t > 0\,,\quad u(x,0) = 0$ für $x > 0 \quad$ und $\quad u \to 0$ als $x \to \infty$
zu lösen.

$$\left[\text{Lösung :} \quad u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - e^{-k^2 t}) \frac{\sin kx}{k} \, dk\right]$$

(4 Punkte)

Aufgabe 48.3 (Sinus- und Cosinustransformationen)
Definiere: $\mathcal{F}_c[f](k) := \int_0^\infty f(x)\cos kx\; dx$ und $\mathcal{F}_s[f](k) := \int_0^\infty f(x)\sin kx\; dx\,.$

a) Sei $f, g \in L^1(0,\infty)$. Zeige, dass $\mathcal{F}_s[f]\cdot\mathcal{F}_c[g] = \mathcal{F}_s[h]$ und $\mathcal{F}_s[f]\cdot\mathcal{F}_s[g] = \mathcal{F}_c[H]\,,$ wobei die Faltungen gegeben sind durch:

$$h(x) \;=\; \int_0^\infty f(y)\frac{g(|x-y|)-g(|x+y|)}{2}\;dy\,,$$

$$H(x) \;=\; \int_0^\infty f(y)\frac{\operatorname{sgn}(x-y)g(|x-y|)-g(|x+y|)}{2}\;dy \quad,\quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ -1, & t<0\,. \end{cases}$$

b) Vorausgesetzt, dass f stetig und stückweise glatt ist und $f, f' \in L^1(0,\infty)$.

Zeige, dass: $\mathcal{F}_c[f'](k) = k\,\mathcal{F}_s[f](k) - f(0)\,,\quad \mathcal{F}_s[f'](k) = -k\,\mathcal{F}_c[f](k)\,.$

(6 Punkte)

Aufgabe 48.4 (D'Alemberts Lösung der eindimensionalen Wellengleichung II)
Betrachte die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = f(x)$ und $u_t(x,0) = g(x)$.

a) Zeige, vorausgesetzt, dass die Fouriertransformierten existieren, dass:

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)\;\cos ctk + \widehat{g}(k)\frac{\sin ctk}{ck}\;.$$

b) Nun invertiere diese Fouriertransformierte, um d'Alemberts Lösung aus Aufg. 44.2 zu erhalten. [Tipp: Für den ersten Term schreibe $\cos ctk = \frac{1}{2}(e^{ictk} + e^{-ictk})$ und für den zweiten benutze Aufgabe 38.1.]

(4 Punkte)