Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker IV
SoSe 2010 Blatt 47 (Aufgabe 47.1 - 47.2)

Abgabe in den Übungen: 3.06.2010

Aufgabe 47.1 (Fouriertransformation)

Zeige für die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[f(x)] =: \widehat{f}(k)$ einer integrablen Funktion $f(x)$, dass

a) $\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-iak}\widehat{f}(k) \quad , \quad \mathcal{F}[e^{iax}f(x)] = \widehat{f}(k-a)$,

b) Falls $\delta > 0$ und $f_\delta(x) := \frac{1}{\delta}f(\frac{x}{\delta})$ gilt:

$$\mathcal{F}[f_\delta(x)] = \widehat{f}(\delta k) \quad , \quad \mathcal{F}[f(\delta x)] = (\widehat{f})_\delta(k) \ ,$$

c) Falls f stetig und stückweise glatt ist und f' bzw. xf auch integrabel sind, dann gilt:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = ik\widehat{f}(k) \quad , \quad \mathcal{F}[xf(x)] = i(\widehat{f})'(k) \ ,$$

d) Ist $g(x)$ auch integrabel, gilt: $\widehat{f*g} = \widehat{f}\ \widehat{g}$.

Nun finde durch Vergleich mit Aufgabe 38.1 die Fouriertransformierten von

a) $f_a(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a} & , \quad |x| \le a \\ 0 & , \quad |x| > a \end{cases}$

b) $g(x) := e^{-|x|}$

c) $\overline{g}(x) := g(x) * f_a(x)$, der Mittelung von g über dem Intervall $[x-a\,,\ x+a]$.

Berechne $g(x) * f_a(x)$ und zeige durch Inversion, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}dx = \pi(1-e^{-1}) \,.$$

Was ist $\lim_{a\to 0} \mathcal{F}[f_a(x)]$? Vergleiche die Graphen von $f_a(x)$ für $a < 1$ und $a > 1$.

(10 Punkte)

Aufgabe 47.2 (Heisenbergsche Unschärferelation)

Sei f eine stetige und stückweise glatte Funktion und $f, xf, f' \in L^2$. Betrachte die partielle Integration von $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\overline{f(x)}f'(x)\,dx$ und die Limes $\alpha \to -\infty$, $\beta \to \infty$, um zu zeigen, dass:

$$\int |f(x)|^2 dx = -2\,\mathrm{Re} \int \overline{xf(x)}\; f'(x)\,dx\,.$$

Benutze die Cauchy-Schwarz Ungleichung für $\left(\int |f(x)|^2\,dx\right)^2$ und den Satz von Plancherel $\int |f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\widehat{f}|^2$, um zu zeigen, dass:

$$\left(\int |f(x)|^2\,dx\right)\left(\int |\widehat{f}(k)|^2\,dk\right) \;\leq\; 4\left(\int x^2|f(x)|^2\,dx\right)\left(\int k^2|\widehat{f}(k)|^2\,dk\right)\,.$$

Definiere die Varianz von f um den Punkt $x = a$ durch

$$\Delta_a f := \frac{\displaystyle\int (x-a)^2|f(x)|^2\,dx}{\displaystyle\int |f(x)|^2\,dx}\,.$$

Sei $\;F(x) := e^{-i\alpha x}f(x+a) \quad ; \quad \alpha, a \in \mathbb{R}\,.$

Zeige mit Hilfe von 47.1, dass

a) $\Delta_a f = \Delta_0 F$

b) $\widehat{F}(k) = e^{ia(k+\alpha)}\,\widehat{f}(k+\alpha)$ und damit, dass $\quad \Delta_\alpha \widehat{f} = \Delta_o \widehat{F}$

c) (Heisenbergsche Ungleichung)

$$(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \widehat{f}) = (\Delta_o F)(\Delta_0 \widehat{F}) \;\geq\; \frac{1}{4}\,.$$

Zeige, dass die Gleichheit $(\Delta_0 f)(\Delta_o \widehat{f}) = \frac{1}{4}$, gilt genau dann, wenn $f' + cxf = 0$, für $c \in \mathbb{R}$, und damit, dass die Funktionen, die das Unsicherheitsprodukt $(\Delta_0 f)(\Delta_0 \widehat{f})$ minimieren, genau die Funktionen der Gauß'schen Form $f(x) = Ce^{-cx^2/2}$, $c > 0$ sind.

[Tipp: In der obigen Herleitung der Unschärferelation spielt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung eine wichtige Rolle. Wann gilt in dieser die Gleichheit?]

Was sind die minimierenden Funktionen für das Unsicherheitsprodukt $(\Delta_a f)(\Delta_\alpha \widehat{f})$ für allgemeine a , α ?

(10 Punkte)