Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker IV
SoSe 2010 Blatt 46 (Aufgabe 46.1 - 46.4)

Abgabe in den Übungen: 20.05.2010

Aufgabe 46.1 (Eindimensionale Wellengleichung)

a) Eine Welle, die die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ löst, hat zu der Zeit t folgende Gesamtenergie:
$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u_t(x,t)^2 + c^2 u_x(x,t)^2 \right] dx \, .$$
Zeige, dass $E(t)$ eine Erhaltungsgröße ist, also $\dfrac{dE}{dt} = 0$.

b) Verwende diesen Energieerhaltungssatz um nachzuweisen, dass $u = 0$ die einzige Lösung ist, die die Anfangsbedingungen $u_0 = 0, \; v_0 = 0$ in Aufgabe 44.2 d) erfüllt.

c) Zeige, dass für die gedämpfte Welle, beschrieben durch $u_{tt} = c^2 u_{xx} - \alpha u_t$, $\alpha > 0$, die Energie abnimmt.

d) Die Energiedichte bzw. Impulsdichte sind gegeben durch $e := \frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2)$ bzw. $p := c u_t u_x$. Zeige, dass
$$\frac{\partial e}{\partial t} = c \, \frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial t} = c \, \frac{\partial e}{\partial x}$$
und dass dadurch sowohl $e(x,t)$ als auch $p(x,t)$ die Wellengleichung erfüllen.

e) Zeige, dass die Wellengleichung folgende Invarianzen besitzt. Falls $u(x,t)$ die Wellengleichung erfüllt, so ist jede Translation $u(x-a,t)$ mit festem a, jede Ableitung, etwa u_x, und jede Streckung $u(bx,bt)$ auch Lösung.

(5 Punkte)

Aufgabe 46.2 (Wärmeleitungsgleichung I)

Eine metallische Kugel mit dem Radius ρ und einer einheitlich konstanten Temperatur $\psi = k(> 0)$ wird zu der Zeit $t = 0$ in eine Flüssigkeit mit der Temperatur 0 eingetaucht. Löse die Wärmeleitungsgleichung $\nabla^2 \psi = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}$ mit diesen Randbedingungen, um zu zeigen, dass die Temperaturverteilung zu jeder nachfolgenden Zeit t gegeben ist durch
$$\psi(r,t) = \frac{2k\rho}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi r}{\rho} \, e^{-n^2\pi^2 a^2 t/\rho^2} \, .$$

(5 Punkte)

Aufgabe 46.3 (Laplace-Gleichung)

Finde die endlichen Lösungen der dreidimensionalen Laplace-Gleichung $\nabla^2 \psi = 0$

a) innerhalb der Sphäre mit dem Radius $r = 2$, gegeben, dass auf der Sphäre $\psi = 5\cos^3\theta - \cos\theta$ ist,

b) außerhalb der Sphäre mit dem Radius $r = 2$, gegeben, dass auf der Sphäre $\psi = \cos^2\theta$ ist.

[Lösungen: a) $\psi(r,\theta) = (r - \frac{3r^3}{8})\cos\theta + \frac{5r^3}{8}\cos^3\theta$ b) $\psi(r,\theta) = \frac{2}{3r} + \frac{8}{r^3}(\cos^2\theta - \frac{1}{3})$]

(5 Punkte)

Aufgabe 46.4 (Wärmeleitungsgleichung II) (korrigierte Fassung)

Betrachte einen unendlichen Kreiszylinder mit dem Radius $r = 2$. Die Oberfläche des Zylinders wird stets auf Temperatur 0 gehalten. Zu der Zeit $t = 0$ ist die Temperaturverteilung gegeben durch: $\psi(r,0) = J_0(1{,}2\,r) + 3\,J_0(2{,}76\,r)$. Löse die Wärmeleitungsgleichung

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\;,$$

um zu zeigen, dass die Temperaturverteilung zu jeder Zeit $t(> 0)$ annähernd wie folgt lautet:

$$\psi(r,t) = e^{-1{,}44\,a^2 t} J_0(1{,}2\,r) + 3e^{-7{,}62\,a^2\,t} J_0(2{,}76\,r)\,.$$

(5 Punkte)