Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker IV
SoSe 2010 Blatt 45 (Aufgabe 45.1 - 45.2)

Abgabe in den Übungen: 6.05.2010

Aufgabe 45.1 (Besselfunktionen II)

Betrachte die Besselfunktionen der 1. Art der Ordnung ν:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}, \quad \nu \in \mathbb{C}\,.$$

Multipliziere diese Potenzreihe mit z^ν bzw. mit $z^{-\nu}$ und diffrenziere gliedweise, um zu zeigen, dass:

$$\frac{d}{dz}\big[z^\nu J_\nu(z)\big] = z^\nu J_{\nu-1}(z)\,, \qquad \frac{d}{dz}\big[z^{-\nu} J_\nu(z)\big] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)\,.$$

Folgere die Rekursionsformeln

$$\frac{2\nu}{z}\, J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)\,, \quad 2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$$

sowie die Gleichung

$$z^{\nu+1}\, J_\nu(z) = -\frac{d}{dz}\left[z^{2\nu+1}\frac{d}{dz}\Big(z^{-\nu} J_\nu(z)\Big)\right]\,.$$

Vereinfache diese Gleichung auf die Form (vergleiche Aufgabe 40.2):

$$z^2 J''_\nu(z) + zJ'_\nu(z) + (z^2-\nu^2)J_\nu(z) = 0\,.$$

Definiere den Erzeugenden $\varphi(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n$ der Besselfunktionen der Ordnung $n \in \mathbb{N}$.

Zeige, dass:

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\tfrac{1}{2}J_{n-1}(z) - \tfrac{1}{2}J_{n+1}(z)\Big)t^n = \frac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\,\varphi(z,t)$$

und dass damit der Erzeugende die folgende Form annimmt:

$$\varphi(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \exp\left(\frac{z}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big)\right)\,.$$

Nun ersetze t durch $-(1/\tau)$, um zu zeigen dass $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)\,.$

Die $J_n(z)$ sind Koeffizienten in einer Laurententwicklung von φ um $t = 0$. Es folgt, dass:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C t^{-n-1} \exp\left(\frac{z}{2}\Big(t - \frac{1}{t}\Big)\right) dt\,,$$

wobei C eine Schleife in der komplexen t-Ebene um $t = 0$ ist.
Wähle für C einen Einheitskreis mit der Parametrisierung $t = e^{i\theta}$, um zu zeigen, dass $J_n(z)$ die folgende Form annimmt:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin\theta - n\theta)\, d\theta\,.$$

(12 Punkte)

Aufgabe 45.2 (Laplace-Gleichung)
Löse unter Anwendung eines Separationsansatzes für $u = u(x, y)$ die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad x \in [0, \pi]\,, \quad y \in [0, a]\,,$$

mit den folgenden Randbedingungen:

a) $u(0, y) = 0\,, \quad u(\pi, y) = 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0\,, \quad u(x, a) = x^2 \;$ für $\; 0 \le x < \pi\,,$

b) $u(0, y) = 0\,, \quad u(\pi, y) = 0\,, \quad u(x, 0) = 0\,, \quad u(x, a) = 1 \;$ für $\; 0 < x < \pi\,.$

(8 Punkte)