Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker IV
SoSe 2010 Blatt 44 (Aufgabe 44.1 - 44.4)

Abgabe in den Übungen: 22.04.2010

Aufgabe 44.1 (Sturm-Liouville Eigenwertprobleme) (korrigierte Fassung)

a) Betrachte das Sturm-Liouville Eigenwertproblem auf dem Intervall $[0, 1]$

$$\frac{d}{dx}\left(4x^{1/2}\frac{d\varphi}{dx}\right) + \lambda x^{-1/2}\varphi = 0$$

mit den Randbedingungen: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Benutze die Transformation $x = t^2$, um die Eigenfunktionen zu finden und zu zeigen, dass diese orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $x^{-1/2}$ sind. Zeige, dass die normierten Eigenfunktionen $\varphi_n = \sin(n\pi\sqrt{x})$, $n \in \mathbb{N}$, sind (mit Normierung bezüglich des gewichteten Skalarproduktes).

b) Zeige mittels der Transformation $t = \sin x$, dass die Eigenfunktionen der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\sec x\,\frac{dy}{dx}\right) + \lambda y\cos x = 0$$

auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ unter den Randbedingungen $y(0) = y(\pi/2) = 0$ gegeben sind durch: $y_n = a_n \sin(n\pi\sin x)$, $n \in \mathbb{N}$.
Zeige: Diese sind orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $\cos x$ im Intervall $[0, \pi/2]$ und die entsprechende Normierungskonstante ist: $a_n = \sqrt{2}$.

c)
i) Zeige mit dem Ansatz $y = x^\alpha$, dass die Eulersche Differentialgleichung $x^2y'' - xy' + \lambda y = 0$ die allgemeine Lösung $y(x) = ax^{1+\sqrt{1-\lambda}} + bx^{1-\sqrt{1-\lambda}}$ hat.

ii) Zeige, dass diese Gleichung die Sturm-Liouville Form: $\left(\frac{1}{x}y'\right)' + \lambda x^{-3}y = 0$ hat.

iii) Zeige, dass mit den Randbedingungen $y(1) = 0 = y(e)$ die Eigenwerte des Sturm-Liouville Eigenwertproblems gegeben sind durch: $\lambda_n = 1+n^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$, und dass die entsprechenden Eigenfunktionen $y_n = c_n x\sin(n\pi\ln x)$ sind.

iv) Zeige, dass diese Eigenfunktionen orthogonal bezüglich der Gewichtsfunktion $r(x) = x^{-3}$ im Intervall $[1, e]$ sind (benutze die Substitution $x = e^t$) und zeige, dass die Normierungskonstante $c_n = \sqrt{2}$ ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 44.2 (D'Alemberts Lösung der eindimensionalen Wellengleichung)
Betrachte die Wellengleichung $u_{tt} = c^2u_{xx}$. (Wir schreiben: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ usw.)

a) Zeige, dass $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, wobei f und g C^2-Funktionen sind, die Gleichung $u_{\xi\eta} = 0$ löst. Umgekehrt, zeige, dass jede C^2-Lösung von $u_{\xi\eta} = 0$ diese Form hat. [Tipp: Wenn $v_\xi = 0$ ist, dann ist v unabhängig von ξ.]

b) Sei $\xi = x - ct$ und $\eta = x + ct$.
Benutze die Kettenregel, um zu zeigen, dass $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta}$.

c) Schließe daraus, dass die allgemeine C^2-Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ gegeben ist durch: $u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct)$, wobei ϕ, ψ allgemeine C^2-Funktionen sind.

Bemerkung: $\phi(x - ct)$ stellt eine Welle, die sich vorwärts (nach rechts) mit der Geschwindigkeit c bewegt, dar und $\psi(x + ct)$ eine Welle, die sich rückwärts (nach links) mit der Geschwindigkeit c bewegt.

d) Die beliebigen Funktionen ϕ und ψ sind durch Anfangsbedingungen bestimmt. Zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x)$$

gegeben ist durch:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy\,.$$

(8 Punkte)

Präsenzaufgaben für den 22.04.10

Aufgabe 44.3 (Partielle Differentialgleichungen)
Finde durch Elimination der beliebigen Funktionen f bzw. g die partiellen Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung, deren Lösungen wie folgt gegeben sind:

i) $u = f(x-y)\,,$ ii) $u = f(x/y)\,,$ iii) $u = f(x) + g(y)\,,$

iv) $u = yf(x) + \big(f(x)\big)^2\,,$ v) $u = f(x-y) + xg(x-y)\,.$

[Lösungen: i) $\partial u/\partial x + \partial u/\partial y = 0$, ii) $x\,\partial u/\partial x + y\,\partial u/\partial y = 0$, iii) $\partial^2 u/\partial x\,\partial y = 0$,

iv) $u = y\,\partial u/\partial y + (\partial u/\partial y)^2$, v) $\partial^2 u/\partial x^2 + 2\partial^2 u/\partial x\,\partial y + \partial^2\, u/\partial y^2 = 0$]

Aufgabe 44.4 (Wiederholung: Fourierreihe)
Skizziere den Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x/l\,, & 0 \le x \le l/2 \\ 2(l-x)/l\,, & l/2 \le x \le 3l/2 \\ 2(x-2l)/l\,, & 3l/2 \le x \le 2l \end{cases}$$

und zeige, dass diese darstellbar ist durch die Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\,, \quad 0 \le x \le 2l\,.$$

Wiederholung
Zum besseren Verständnis der ersten Vorlesungen im Sommersemester ist es sinnvoll, die Kapitel über Fourierreihen aus dem zweiten und Fouriertransformationen aus dem dritten Semester zu wiederholen.