Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 43 (Aufgabe 43.1 - 43.3)

(keine Abgabe, aber klausurrelevant)

Aufgabe 43.1 (Zweidimensionale Laplace-Gleichung)
Löse unter Anwendung des Separationsansatzes $u(x,y) = R(x)S(y)$ die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \quad x \in [0,\pi] \ , \quad y \in [0,\infty) \ ,$$

mit den folgenden Randbedingungen:

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) \ \ \forall\ y \in [0,\infty)\,;\ u(x,0) = 0 \ \ \forall\ x \in [0,\pi]\,,$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) \ \ \forall\ y \in [0,\infty)\,;\ u(x,0) = 3\cos 2x\ ,\ u(x,\infty){=}0\ \forall\ x \in [0,\pi].$

[Lösungen: a) $u = a\cos nx \sinh ny,\ n \in \mathbb{Z},\ a$ beliebige Konstante , b) $u = 3e^{-2y}\cos 2x$]

Aufgabe 43.2 (Eindimensionale Wellengleichung)
Löse unter Anwendung des Separationsansatzes $u(x,y) = R(x)S(y)$ die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ , \quad x \in [0,\pi] \ , \quad y \in [0,\infty) \ ,$$

mit den folgenden Randbedingungen:

a) $u(0,y) = 0 = u(\pi,y) \quad \forall\ y \in [0,\infty)\,;\ u(x,0) = 0 \quad \forall\ x \in [0,\pi]\,,$

b) $u(0,y) = 0 = u(\pi,y) \quad \forall\, y \in [0,\infty)\,;\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0\,,\ u(x,0){=}3\sin 4x - 6\sin 5x \quad \forall\ x \in [0,\pi]\,.$

[Lösungen: a) $u = a\sin nx \sin ncy,\ n \in \mathbb{Z},\ a$ beliebige Konstante ,
b) $u = 3\sin 4x\cos 4cy - 6\sin 5x\cos 5cy$]

Aufgabe 43.3 (Hermite-Polynome)

a) Zeige, dass die Hermite-Polynome

$$H_n(z) := (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}\,,\ z \in \mathbb{C}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

die Hermitschen Differentialgleichungen $y'' - 2zy' + 2ny = 0$ auf $\mathbb{C}$ lösen.

b) Zeige mit Cauchys Integralformel, dass:

$$H_n(z) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-(\xi^2 - z^2)}\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \ = \ \frac{n!}{2\pi i}\int_C \eta^{-n-1}e^{2z\eta-\eta^2}d\eta \ , \qquad \eta := z - \xi \ ,$$

wobei C eine geschlossene Schleife um den Punkt $\xi = z$ bzw. $\eta = 0$ ist. Damit sind die $H_n(z)/n!$ offensichtlich die Koeffizienten einer Taylor-Entwicklung der erzeugenden Funktion der Hermite-Polynome $G(z,\eta) := e^{2z\eta-\eta^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)\eta^n/n!$.