Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 42 (Aufgabe 42.1 - 42.3)

Abgabe: Di 2.02.2010 um 11 Uhr

Aufgabe 42.1 (Lineare Differentialgleichungen II)

Finde die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $y'(t) = A \cdot y(t)$, wobei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\ ,\ t \mapsto y(t)$ und

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(s. Anleitung zu Aufgabe 41.2). (5 Punkte)

Aufgabe 42.2 (Exponentialreihe)

a) Sei $B(b) := \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad R(b) := \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}\ ,\quad I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$

Zeige, dass aus $B(b)^2 = -b^2 I_2$ durch Einsetzen in die Exponentialreihe die Gleichung $\exp B(b) = R(b)$ folgt.

b) Betrachte die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne und vergleiche die Matrizen $\exp A \cdot \exp B$ und $\exp(A + B)$.

c) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ mit $AB = BA$. Beweise:

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B\ .$$

(Vergleiche Aufgabe 21.5).

d) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ eine schiefhermitesche Matrix $A^\dagger = -A$.
Zeige, dass $\exp A$ eine unitäre Matrix ist.

e) Berechne die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der hermiteschen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ 3i & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Zeige, dass

$$\exp(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^4 + e^{-2} & -i(e^4 - e^{-2}) \\ i(e^4 - e^{-2}) & e^4 + e^{-2} \end{pmatrix}\ .$$

(8 Punkte)

Aufgabe 42.3 (Exponentialfunktion einer Matrix)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix} & I_2 & & 0 \\ & \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix} & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & \begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2k \times 2k, \mathbb{R}) \ ,$$

wobei $I_2 \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix ist.

Zeige, dass A in eine Summe von drei paarweise kommutierenden Matrizen zerlegbar ist. Nämlich, $A = a \cdot I_{2k} + b \cdot H + N$ mit

$$H = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} .$$

Nun benutze Aufgabe 42.2, um zu zeigen, dass

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \frac{e^a}{0!}R(b) & \frac{e^a}{1!}R(b) & \frac{e^a}{(2!)}R(b) & \cdots & \frac{e^a}{(k-1)!}R(b) \\ & \frac{e^a}{0!}R(b) & \frac{e^a}{1!}R(b) & & \frac{e^a}{(k-2)!}R(b) \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \frac{e^a}{0!}R(b) & \frac{e^a}{1!}R(b) \\ 0 & & & & \frac{e^a}{0!}R(b) \end{pmatrix} .$$

(7 Punkte)