Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 41 (Aufgabe 41.1 - 41.3)

Abgabe: Di 26.01.2010 um 11 Uhr

Aufgabe 41.1 (Klassifizierung 2×2 Matrizen)

a) Zeige mit Hilfe von Aufgabe 29.5, dass jeder Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$, der *keinen* Eigenvektor in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat, bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ gegeben wird.

b) Beweise: Jede reelle 2×2 Matrix ist entweder i) diagonalosierbar, ii) trigonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar oder iii) von dem Typ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(Hinweis: Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ hat entweder zwei Eigenvektoren in $\mathbb{R}^2$ oder einen oder keinen).

c) Begründe, dass jede Matrix aus $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ zu einer Matrix aus einer der folgenden Mengen konjugiert ist:

$$M_1 = \left\{ J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \,\middle|\, \lambda_1 \geq \lambda_2 \right\},$$

$$M_2 = \left\{ J_2(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ J_2(a, b) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \,\middle|\, b > 0 \right\}$$

und zwar entsprechend den drei Typen in b).

d) Vom welchem der Typen sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und in welche Matrizen aus Teil c) lassen sie sich überführen?

(7 Punkte)

Aufgabe 41.2 (Lineare Differentialgleichungen I)

Bestimme alle Lösungen $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der linearen Differentialgleichungssysteme

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \cdot x(t) := \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = B \cdot y(t) := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Anleitung:

a) Finde $X, Y \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, so dass

$$X^{-1}AX = J_2(3,1),$$
$$Y^{-1}BY = J_2(-2).$$

Also, bringe A und B durch Basiswechsel auf eine der möglichen Formen aus Aufgabe 41.1.

b) Finde die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = J_2(3,1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = J_2(-2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

und benutze die Transformationsmatrizen X, Y aus a) , um die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungssysteme (1) und (2) zu finden.

c) Prüfe nach, ob die gefundenen Lösungen tatsächlich Lösungen sind.

(8 Punkte)

Aufgabe 41.3 (Jordan Normalform)

Bestimme die Jordan-Normalform von

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -10 & 20 & 37 \\ 0 & 3 & -10 & 10 & 26 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{Q}).$$

Was sind die algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte?
Gib das Minimalpolynom von C an.

(5 Punkte)