Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker III
WS 2009/2010 Blatt 40 (Aufgabe 40.1 - 40.4)

Abgabe: Di 19.01.2010 um 11 Uhr

Aufgabe 40.1 (Exakte Differentialgleichungen)

a) Zeige, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und finde die allgemeinen Lösungen:

i) $(x^2 + 2y + x)\,dx + (y^2 + 2x - y)\,dy = 0\,,$

ii) $(x + 2y)x\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0\,,$

iii) $\left(\frac{1}{x} - y\cos x\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \sin x\right)dy = 0\,,$

iv) $(2xy + \cos x\cos y)\,dx + (x^2 + y^2 - \sin x\sin y)\,dy = 0\,.$

b) Löse die folgenden Differentialgleichungen, gegeben dass jede einen integrierenden Faktor besitzt, welcher eine Funktion von nur y ist:

i) $3xy\,dx + (3x^2 + y^3)\,dy = 0\,,$

ii) $\sin x\cot y\,dx + (\cos x + y\ \csc y)\,dy = 0\,.$

(6 Punkte)

Aufgabe 40.2 (Besselfunktionen)

a) Zeige, dass die Reihe $J_n(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}$, $n \in \mathbb{N}$, die Besselschen Gleichung n-ter Ordnung:

$$x^2 J_n'' + xJ_n' + (x^2 - n^2)J_n = 0$$

erfüllt.

b) Betrachte einige der ersten Terme der Reihen für $J_l(x)$ mit $l = \pm\frac{1}{2}$, um zu zeigen dass:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \text{und} \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,.$$

Zeige durch Einsetzen in die Gleichung, dass diese Funktionen Lösungen der Besselschen Gleichung der Ordnung $\frac{1}{2}$ sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 40.3 (Charakteristische Polynome)
Betrachte die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechne die charakteristischen Polynome $\chi_A(T) := \det(A - T \cdot \mathrm{id})$ (bzw. $\chi_B(T)$) von A (bzw. B) und zeige, dass $\chi_A(A) = \chi_B(B) = 0$.

b) Seien $M_A(T) := (T-2)(T-3)^3$ und $M_B(T) := (T-2)^2(T-3)^2$. Zeige, dass $M_A(A) = 0$, $M_A(B) \neq 0$, $M_B(A) \neq 0$ und $M_B(B) = 0$.

c) Warum ist die Matrix A nicht diagonalisierbar? (Tipp: Rang!)

(5 Punkte)

Aufgabe 40.4 (Normalformen)
Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$. Seien $L_1, L_2, M_1, M_2 \in \mathrm{End}\,(V)$ mit Matrizen bezüglich B gegeben durch:

$$L_1 := \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;,\; L_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;,\; M_1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \;,\; M_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimme $A \in \mathrm{Aut}\,(V)$ mit $M_1 = AL_1A^{-1}$ (Tipp: Basiswechsel durchführen).
b) Bestimme $C \in \mathrm{Aut}\,(V)$ mit $M_2 = CL_2C^{-1}$.
c) Warum sind L_1, L_2, M_1, M_2 nicht diagonalisierbar?

(3 Punkte)