Universität Potsdam
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Devchand

Mathematik für Physiker
WS 2008/09 Blatt 4 (Aufgaben 4.1 - 4.5)

Abgabe in den Übungen am 18.11.2008

Aufgabe 4.1 (Polynome und Ungleichungen)

a) Zeige, dass für alle $x, a \in \mathbb{Q}$ gilt: $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$.
Bemerkung: Es handelt sich hier um eine Art *Binomische Formel*.

b) Beweise dann, dass für alle $0 \leq x, a$ gilt:

$$0 \leq x^3 - a^3 - 3a^2(x-a) \; .$$

c) Was bedeutet diese Ungleichung für den Graphen der beiden Funktionen

$$x \mapsto x^3 \quad \text{und} \quad x \mapsto a^3 + 3a^2(x-a) \; .$$

Hinweis: Der Graph von $x \mapsto a^3 + 3a^2(x-a)$ ist eine Gerade, die mit dem Graph von $x \mapsto x^3$ bei $x = a$ einen gemeinsamen Punkt besitzt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2 (Zyklische Gruppe)

Auf der Menge der Restklassen modulo q

$$\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{[n] = n + q\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

können wir eine Addition definieren durch $[m] + [n] = [m+n]$.

Zeige: Mit dieser Addition als Verknünpfung ist $\mathbb{Z}_q$ eine abelsche Gruppe mit q Elementen $[0], [1], \ldots, [q-1]$.

Diese Gruppe heißt *Zyklische Gruppe der Ordnung* q: Addieren wir zu einem beliebigen Element von $\mathbb{Z}_q$ das Element $[1]$, dazu wieder $[1]$ usw., dann durchlaufen wir nacheinander alle Elemente von $\mathbb{Z}_q$ bis wir nach q Schritten zum Ausgangspunkt zurückkehren.

(3 Punkte)

Aufgabe 4.3 (Symmetrische Gruppe)

Betrachte die Permutationen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$.

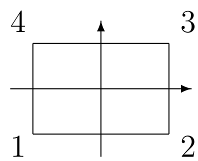
Bestimme die Multiplikationstabelle bezüglich der Komposition der Permutationen.

Zeige, dass die Menge alle Permutationen, zusammen mit der Komposition als Verknüpfung, eine nicht-kommutative Gruppe bildet.

(Diese Gruppe heißt die *symmetrische Gruppe von drei Elementen*, S_3.)

(3 Punkte)

Aufgabe 4.4 (Kleinsche Vierergruppe)

a) 

Betrachte die Symmetriegruppe eines Rechtsecks mit ungleichen Seiten. Wir ordnen den Ecken die Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$ zu. Die Symmetrien, die die Abstände erhalten, sind gegeben durch:

$$\begin{array}{rcll} e & : & (1,2,3,4) \mapsto (1,2,3,4) & \text{neutrale Abbildung} \\ f & : & (1,2,3,4) \mapsto (4,3,2,1) & \text{Spiegelung an der x-Achse} \\ g & : & (1,2,3,4) \mapsto (2,1,4,3) & \text{Spiegelung an der y-Achse} \\ h & : & (1,2,3,4) \mapsto (3,4,1,2) & \text{Drehung um } 180^\circ X \end{array}$$

Zeige: die Menge der Abbildungen $V_4; = \{e, f, g, h\} = \{(1), (14)(23), (12)(34), (13)(24)\}$ mit Komposition als Verknüpfung bildet eine kommutative Gruppe, genannt *Kleinsche Vierergruppe*. Schreibe die Gruppentafel (Verknüpfungstabelle) aus.

b) Betrachte nun die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, mit Elementen $\{(0,0)\,,\ (0,1)\,,\ (1,0)\,,\ (1,1)\}$. Bestimme die Gruppentafel. Gibt es eine Verbindung zur Gruppentafel der Abbildungen V_4 in a)? Wir sagen, dass die Kleinsche Vierergruppe $(V_4\ ,\ \circ)$ *isomorph* zu der Gruppe $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\ ,\ +)$ ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4.5 (Kreise und der Graph von $\mathbf{x \mapsto x^4}$)

a) Es sei (m, n) ein Punkt der (x, y)-Ebene und es sei $r > 0$, dann zeichne die Menge aller Punkte (x, y) mit

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 \leq r^2.$$

b) Betrachte den Graphen von $x \mapsto x^4$. Bestimme den Kreis mit dem Mittelpunkt auf der y-Achse, der diesen Graph im Punkt $(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{16})$ berührt.
Stelle die Ungleichung auf, die beweisen würde, dass für $|x| \leq 1$ die Punkte des Funktionsgraphen *innerhalb* dieses Kreises liegen.

c) Bestimme analog zu b) den Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse, der diesen Graph im Punkt $(2\ ,\ 16)$ berührt.

d) Läßt sich einen Kreis finden, der den Graph im Punkt $(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{16})$ berührt, bei dem der Graph dann aber *außerhalb* dieses Kreises verläuft?

(5 Punkte)